

# Algèbre linéaire I (Révisions)

## 1 Matrices

Dans tout ce qui suit,  $\mathbb{K}$  désigne le corps  $\mathbb{R}$  ou le corps  $\mathbb{C}$ .

### 1.1 Définitions

#### Définition 1.1

Pour tous entiers positifs  $n$  et  $p$ , on appelle **matrice de taille  $n \times p$  à coefficients dans  $\mathbb{K}$**  un tableau à  $n$  lignes et  $p$  colonnes :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix}.$$

Les  $a_{ij}$  s'appellent les **coefficients de la matrice**. Le premier indice est celui de la ligne et le second celui de la colonne.

On note  $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$  l'ensemble des matrices à  $n$  lignes et  $p$  colonnes et  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) = \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K})$ , on parle alors de **matrice carrées**.

► Quelques matrices particulières :

– la **matrice nulle**  $O_{n,p} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ , la **matrice identité**  $I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ .

– les **matrices diagonales**  $A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ .

– les **matrices triangulaires supérieures** (resp. **inférieures**)  $A = \begin{pmatrix} \star & \star & \cdots & \star \\ 0 & \star & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \star \\ 0 & \cdots & 0 & \star \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

(resp.  $A = \begin{pmatrix} \star & 0 & \cdots & 0 \\ \star & \star & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \star & \cdots & \star & \star \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ).

– les **matrices lignes** ou **vecteurs lignes** sont les matrices de  $\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{K})$ .

– les **matrices colonnes** ou **vecteurs colonnes** sont les matrices de  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ .

#### Définition 1.2

– On appelle  $i^{\text{ème}}$  ligne de la matrice  $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$  la matrice ligne  $(a_{i1} \ \cdots \ a_{ip})$ .

– On appelle  $j^{\text{ème}}$  colonne de la matrice  $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$  la matrice colonne  $\begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix}$ .

## 1.2 Opérations élémentaires sur les matrices

### Définition 1.3

- **La somme de deux matrices** de même taille  $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$  et  $B = (b_{ij}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ , est la matrice  $C = A + B = B + A = (c_{ij}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$  avec  $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ .
- **Le produit d'une matrice**  $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$  **par un scalaire**  $\lambda \in \mathbb{K}$  est la matrice  $B = \lambda A = A\lambda = (b_{ij}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$  avec  $b_{ij} = \lambda a_{ij}$ .

► **Attention :** On ne définit pas la somme de deux matrices de tailles différentes.

### Définition 1.4

Le **produit de deux matrices**  $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$  et  $B = (b_{ij}) \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$  est la matrice  $C = (c_{ij}) \in \mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{K})$  avec

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + \cdots + a_{ip}b_{pj} = \sum_{k=1}^p a_{ik}b_{kj}$$

► **Attention :**

- Si  $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$  et  $B \in \mathcal{M}_{q,l}(\mathbb{K})$  on ne peut effectuer le produit  $AB$  que si  $p = q$  et le produit  $BA$  que si  $l = n$ .
- En général, même si  $p = n = l = q$ ,  **$AB \neq BA$** .

### Corollaire 1.5

- Si  $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$  et  $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$  est un vecteur colonne, le produit  $AX$  est un vecteur colonne  $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$  avec

$$y_i = \sum_{k=1}^p a_{ik}x_k, \quad i = 1, \dots, n.$$

- Si  $X = (x_1 \ \cdots \ x_n) \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{K})$  est un vecteur ligne et  $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$  est un vecteur colonne alors le produit  $XY \in \mathcal{M}_{1,1}(\mathbb{K})$  est un scalaire donné par

$$x_1y_1 + \cdots + x_ny_n = \sum_{i=1}^n x_iy_i.$$

Ce n'est rien d'autre que le produit scalaire usuel des deux vecteurs  $X'$  et  $Y$  où  $X' = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$  est ce que l'on appelle la transposé de  $X$ .

► **Remarque**

Soit  $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ , on note  $E_j \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ ,  $F_i \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{K})$  les matrices

$$E_j = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} - j^{\text{ème}} \text{ ligne}, \quad F_i = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

|  
 $i^{\text{ème}}$  colonne

Alors la matrice  $AE_j$  est la  $j^{\text{ème}}$  colonne de la matrice  $A$  et la matrice  $F_iA$  est la  $i^{\text{ème}}$  ligne de la matrice  $A$ .

► **Règles de calcul**

On se donne  $A, B, C \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ ,  $D, E \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ ,  $F \in \mathcal{M}_{q,r}(\mathbb{K})$  et  $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ .

1.  $A + (B + C) = (A + B) + C$ .
2.  $A + B = B + A$ ,  $A + 0 = A$ ,  $A - A = 0$ .
3.  $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$ .
4.  $(\lambda\mu)A = \lambda(\mu A)$ .
5.  $I_n A = A$ ,  $A I_p = A$ .
6.  $\lambda(AC) = (\lambda A)C = A(\lambda C)$ .
7.  $(A + B)E = AE + BE$  et  $A(D + E) = AD + AE$ .
8.  $A(EF) = (AE)F$ .

**Corollaire 1.6**

*L'espace  $(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), +, \cdot)$  est  $\mathbb{K}$  espace vectoriel.  
L'espace  $(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), +, \times)$  est un anneau non commutatif, non intègre.*

► **Matrices nilpotentes :**

**Définition 1.7**

*On dit qu'une matrice  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  est nilpotente d'ordre  $q$  si  $A^{q-1} \neq 0$  et  $A^q = 0$ .*

La matrice  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  définie par

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

est nilpotente d'ordre  $n$ .

### Définition 1.8

Soit  $A$  une matrice de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  et  $k \in \mathbb{N}$   
– on définit les puissances de la matrice  $A$  de la façon suivante :

$$A^0 = Id_n, A^k = A \cdot A^{k-1} \text{ pour tout entier } k \geq 1.$$

– Soit  $P$  un polynôme à coefficients dans  $\mathbb{K}$ ,  $P(X) = \sum_{k=0}^p \alpha_k X^k$ , on définit la matrice

$$P(A) = \sum_{k=0}^p \alpha_k A^k.$$

On parle de polynômes de matrices.

## 1.3 Matrice inversible et matrice transposée

### Définition 1.9

On dit qu'une matrice  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  est inversible ssi il existe une matrice  $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  telle que  $AB = BA = I_n$ .

Si  $B$  existe, elle est unique et on note  $B = A^{-1}$  et  $A^{-1}$  est appelé l'inverse de  $A$ .

► **Remarque :** Une des deux relations  $AB = I_n$  ou  $BA = I_n$  suffit pour montrer que  $A$  est inversible.

On notera  $GL_n(\mathbb{K})$  l'ensemble des matrices inversibles de taille  $n \times n$ .

► **Attention :** On ne parle de matrices inversibles que pour des matrices carrées!!!

On étudiera au chapitre 4 la notion de déterminant qui nous donnera un critère efficace pour tester si une matrice est inversible ou non.

### Définition 1.10

Soit  $A \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$ . On définit

1. le **noyau**  $\text{Ker}(A)$  de  $A$  comme l'ensemble des  $X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$  tel que  $AX = 0$ .
2. l'**image**  $\text{Im}(A)$  de  $A$  comme l'ensemble des  $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$  tels que il existe  $X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$  tel que  $AX = Y$ .

### Proposition 1.11

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ , on a équivalence des propriétés suivantes

1.  $A$  est inversible.
2.  $\text{Ker}(A) = \{0\}$ .
3.  $\text{Im}(A) = \mathbb{R}^n$ .

### Proposition 1.12

Soient  $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  deux matrices inversibles. Alors la matrice  $AB$  est inversible et  $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ .

$(GL_n(\mathbb{K}), \times)$  est un groupe.

Démonstration :

### Définition 1.13

On appelle **transposée d'une matrice**  $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ , la matrice de  $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$  que l'on note  ${}^tA = (\alpha_{ij})$  définie par

$$\alpha_{ij} = a_{ji}.$$

### Proposition 1.14

1. Soient  $A, B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ , alors  ${}^t(A+B) \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$  et  ${}^t(A+B) = {}^tA + {}^tB$ .
2. Soient  $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}), B \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ . Alors  ${}^t(AB) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  et  ${}^t(AB) = {}^tB {}^tA$ .
3. Si  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  est inversible, alors  ${}^t(A^{-1}) = ({}^tA)^{-1}$ .

Démonstration :

### ► Remarque

Le produit de deux matrices triangulaires supérieures (resp. inférieures) est triangulaire supérieure (resp. inférieure). L'inverse d'une matrice inversible triangulaire supérieure (resp. inférieure) est triangulaire supérieure (resp. inférieure).

### Définition 1.15

Soit  $A, B \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$ . On dit que  $A$  et  $B$  sont **équivalentes** si et seulement si il existe  $Q \in GL_p(\mathbb{K})$  et  $P \in GL_n(\mathbb{K})$  tel que  $B = QAP^{-1}$ .

Soit  $M, N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . On dit que  $M$  et  $N$  sont **semblables** si et seulement si il existe  $P \in GL_n(\mathbb{K})$  tel que  $M = PNP^{-1}$ .

► **Remarque** : Nous étudierons des propriétés de ces relations plus tard dans ce chapitre et le chapitre 5.

## 1.4 Les matrices élémentaires de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

### Définition 1.16

- Soit  $i \in \{1, \dots, n\}$ , on définit pour  $a \in \mathbb{K}$ ,  $a \neq 0$  la matrice  $D_i(a) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  qui est diagonale et dont tous les coefficients diagonaux sont égaux à 1 excepté le  $i^{\text{ème}}$  qui est égal à  $a$  :

$$D_i(a) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & 1 & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & a & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad - i^{\text{ème}} \text{ ligne}$$

- Soient  $i, j$  deux entiers distincts de  $\{1, \dots, n\}$  ( $i \neq j$ ), on définit la matrice  $E_{ij}$  comme la matrice dont tous les coefficients sont nuls sauf le coefficient  $i, j$  qui est égal à 1.  
 – Soient  $i, j$  deux entiers distincts de  $\{1, \dots, n\}$  ( $i \neq j$ ), pour tout  $\lambda \in \mathbb{K}$  la matrice  $T_{ij}(\lambda) = Id_n + \lambda E_{ij}$  :

$$T_{ij}(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ 0 & \lambda & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad - i^{\text{ème}} \text{ ligne}$$

|  
 $j^{\text{ème}}$  colonne

Les matrices  $D_i(a)$  pour  $a \neq 0$  et  $T_{ij}(\lambda)$  sont appelées **matrices élémentaires** ou dilatation et transvection.

### Proposition 1.17

On a

1.  $(D_i(a))^t = D_i(a)$ ,  $(T_{ij}(\lambda))^t = T_{ji}(\lambda)$ .
2. Si  $a \neq 0$ ,  $(D_i(a))^{-1} = D_i(\frac{1}{a})$ ,  $(T_{ij}(\lambda))^{-1} = T_{ij}(-\lambda)$ .

### Corollaire 1.18

Si  $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  est le produit de matrices élémentaires, alors  $P$  est inversible et son inverse est encore un produit de matrices élémentaires.

### Théorème 1.19 (Opérations élémentaires sur les lignes d'une matrice)

Soit  $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ .

1. La matrice  $D_i(a)A$  est la matrice obtenue à partir de  $A$  en multipliant la  $i^{\text{ème}}$  ligne de  $A$  par  $a$ .
2. La matrice  $T_{ij}(\lambda)A$  est la matrice obtenue à partir de  $A$  en ajoutant à la  $i^{\text{ème}}$  ligne de  $A$   $\lambda$  fois la  $j^{\text{ème}}$  ligne.

## 1.5 Matrices échelonnées ou pivot de Gauss

### Définition 1.20

Soit  $A$  une matrice de  $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ . On dit que la matrice  $A$  est **échelonnée** si

1. Chaque ligne de  $A$  ne comporte que des zéros ou a son premier coefficient non nul égal à 1.
2. Si une ligne est nulle, toutes les suivantes le sont.
3. Si la ligne  $i$  a son premier coefficient non nul sur la colonne  $j$ , alors le premier coefficient non nul de la ligne  $i + 1$  se trouve sur une colonne  $k > j$ .

► Exemples de matrices échelonnées dans  $\mathcal{M}_3(\mathbb{K})$ .

$$\begin{pmatrix} 1 & \star & \star \\ 0 & 1 & \star \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & \star & \star \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & \star \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & \star \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

### Proposition 1.21

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  échelonnée, alors  $A$  est triangulaire supérieure et  $A$  est inversible si et seulement si ses éléments diagonaux sont identiquement égaux à 1.

### Théorème 1.22 (Echelonnement d'une matrice)

Soit  $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ . il existe une matrice  $P$  produit de matrices élémentaires telle que la matrice  $PA$  est échelonnée.

► Exemple :

Echelonnée la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 4 & 5 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

## 1.6 Résolution des systèmes linéaires

### Proposition 1.23

Soit  $A \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$ ,  $P \in GL_n(\mathbb{R})$  et  $b \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ . Alors  $X \in \mathbb{K}^p$  est solution du système linéaire  $AX = b$  si et seulement si  $X \in \mathbb{K}^p$  est solution du système linéaire  $PAX = Pb$ .

Les systèmes linéaires que l'on sait résoudre à la main sont les systèmes associés à une matrice  $A$  triangulaire. La proposition précédente 1.23 et l'algorithme de l'échelonnement nous assurent qu'on peut toujours se ramener à la résolution d'un système triangulaire.

► **Déterminer l'inverse d'une matrice**  $A \in GL_n(\mathbb{K})$

Déterminer  $A^{-1}$  consiste à résoudre  $n$  systèmes linéaires  $AX_j = E_j$  avec  $E_j$  le vecteur de coordonnées  $(E_j)_i = \delta_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ 1 & \text{si } i = j \end{cases}$ . Les colonnes de la matrice  $A^{-1}$  ne sont rien d'autre que les vecteurs  $X_j$ .

► **Exemple**

Déterminer l'inverse de  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$ .

► **Exemple**

Déterminer l'inverse de  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ .

## 1.7 Matrices par blocs

### Définition 1.24

Soit  $A_{11}, A_{12}, \dots, A_{pp} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . On définit la matrice  $M \in \mathcal{M}_{n \times p}(\mathbb{K})$  par blocs comme suit :

$$M = \begin{pmatrix} A_{11} & \dots & A_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{p1} & \dots & A_{pp} \end{pmatrix}$$

#### ► Remarques :

- L'addition de deux matrices par bloc peut se faire par bloc.
- La multiplication de deux matrices par bloc peut se faire par bloc (compatible en taille)
- La transposée est obtenue en transposant les blocs : si on reprend les notations de la définition précédente, on a

$${}^t M = \begin{pmatrix} {}^t A_{11} & \dots & {}^t A_{p1} \\ \vdots & & \vdots \\ {}^t A_{1p} & \dots & {}^t A_{pp} \end{pmatrix}$$

- On dit que  $M$  est diagonale par bloc si  $A_{ij} = 0$  pour tout  $(i, j) \in \{1, \dots, p\}$  avec  $i \neq j$ .
- Une matrice diagonale par bloc est inversible si et seulement si chacun des blocs diagonaux est inversible.

#### ► Exemple :

Montrer que la matrice suivante est inversible et déterminer son inverse :

$$M = \begin{pmatrix} I_n & A & B \\ 0 & I_n & C \\ 0 & 0 & I_n \end{pmatrix}$$

avec  $A, B, C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .

## 2 Introduction aux espaces vectoriels

Soit  $\mathbb{K}$  un corps,  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ .

### 2.1 Définition d'un espace vectoriel

#### Définition 2.1

On dit que  $(E, +, \cdot)$  est un espace vectoriel sur  $\mathbb{K}$  si

1.  $E$  est muni d'une loi de composition interne  $+$  appelée **addition** à savoir une application de  $E \times E \rightarrow E$  telle que :

(a) Il existe un élément appelé **élément neutre pour l'addition**  $0_E \in E$  tel que pour tout  $x \in E$ ,  $0_E + x = x + 0_E = x$ .

(b) Pour tous  $x, y \in E$ , on a  $x + y = y + x \in E$ .

(c) Pour tous  $x, y, z \in E$ ,  $(x + y) + z = x + (y + z)$ .

(d) Pour tout  $x \in E$ , il existe un  $y \in E$  tel que  $x + y = y + x = 0_E$ . Un tel  $y$  est unique et on le note  $y = -x$ .

On dit que  $(E, +)$  est un groupe commutatif.

2.  $E$  est muni d'une loi de composition externe  $\cdot$  appelée **multiplication**, à savoir une application de  $E \times \mathbb{K} \rightarrow E$  ( $\lambda \cdot x \in E$ ,  $\forall \lambda \in \mathbb{K}$ ,  $\forall x \in E$ ) telle que pour tous  $x \in E$ ,  $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$

(a) Il existe un élément appelé **élément neutre pour la multiplication**  $1_{\mathbb{K}} \in \mathbb{K}$  tel que  $1_{\mathbb{K}} \cdot x = x \cdot 1_{\mathbb{K}} = x$ .

(b)  $\lambda \cdot (x + y) = \lambda \cdot x + \lambda \cdot y$ .

(c)  $(\lambda + \mu) \cdot x = \lambda \cdot x + \mu \cdot x$ .

(d)  $\lambda \cdot (\mu \cdot x) = (\lambda\mu) \cdot x$ .

On dira plus brièvement que  $E$  est un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel ou  $\mathbb{K}$ -ev.

#### ► Exemples :

$\mathbb{R}^2$  est un  $\mathbb{R}$ -ev,  $\mathbb{C}^2$  est un  $\mathbb{C}$ -ev,  $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ ,  $M_{2,1}(\mathbb{K})$ ,  $M_{1,2}(\mathbb{K})$  sont des  $\mathbb{K}$ -ev, si  $A \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$  alors  $\text{Ker}(A)$  et  $\text{Im}(A)$  sont des espaces vectoriels sur  $\mathbb{K}$ .

### 2.2 Familles libres, liées, génératrices, bases

#### Définition 2.2

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.

1. Soit  $(e_1, \dots, e_n)$  une famille **finie** d'éléments de  $E$ . On dit que la famille  $(e_1, \dots, e_n)$  est **libre**, si pour toute famille  $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{K}^n$  telle que

$$\alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n = \sum_{k=1}^n \alpha_k e_k = 0_E \implies \forall i \in [1, n], \alpha_i = 0.$$

2. Soit  $(x_i)_{i \in I}$  une famille d'éléments de  $E$  de cardinal quelconque. La famille  $(x_i)_{i \in I}$  est **libre** si toutes ses sous-familles finies sont libres.

3. On dit que la famille  $(x_i)_{i \in I}$  est **liée** si elle n'est pas libre.

4. On dit que la famille  $(x_i)_{i \in I}$  est **génératrice** si pour tout  $x \in E$  il existe  $n \in \mathbb{N}$  et  $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{K}^n$  tels que  $x = \sum_{k=1}^n \alpha_k x_k$ .

Autrement dit, si tout vecteur de  $E$  s'écrit comme une combinaison linéaire de vecteurs de la famille  $(x_i)_{i \in I}$ .

5. On dit que la famille  $(x_i)_{i \in I}$  est une **base** si elle libre et génératrice.

► **Remarque :**

Une combinaison linéaire de vecteurs de  $E$  ne fait intervenir qu'un nombre **fini** de vecteurs !

► **Exemples :**

– Si  $x, y \in E$ , la famille  $(x, y)$  est liée si, et seulement si,  $x = 0$  ou  $y = 0$  ou il existe  $\alpha \in \mathbb{K}$  tel que  $y = \alpha x$ .

–  $(1, X, \dots, X^n)$  est une base de  $\mathbb{K}_n[X]$ .

–  $(X^k)_{k \in \mathbb{N}}$  est une base de  $\mathbb{K}[X]$ .

– **Toute famille de polynômes non nuls de degrés deux à deux distincts est libre.**

–  $((1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1))$  est une base de  $\mathbb{R}^3$ .

– L'espace  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  est un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension 4 dont une base est formée des matrices  $E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ,

$E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $E_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $E_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ . Cette base  $(E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})$  est appelée **base canonique**.

**Proposition 2.3**

Soient  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$  une base de  $E$ . Pour tout  $x \in E$ , il existe un unique  $n$ -uplet  $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{K}^n$  appelé les **coordonnées de  $x$  dans la base  $\mathcal{B}$**  tel que

$$x = \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n = \sum_{k=1}^n \alpha_k e_k.$$

**Démonstration :**

### Définition 2.4 (Espace vectoriel engendré par une famille de vecteurs)

Soit  $(f_1, \dots, f_k)$   $k$  éléments d'un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel  $E$ . On appelle **espace vectoriel engendré par la famille  $(f_i)_i$**  le sous ensemble de  $E$  constitué des combinaisons linéaires des éléments  $f_i$  :

$$\text{Vect}(f_1, \dots, f_k) \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ x \in E, \exists (x_1, \dots, x_k) \in \mathbb{K}^k, x = \sum_{i=1}^k x_i f_i \right\}$$

### Proposition 2.5

Soit  $(f_1, \dots, f_k)$   $k$  éléments d'un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel  $E$ . L'ensemble  $\text{Vect}(f_1, \dots, f_k)$  est un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.

**Démonstration :** Faire en exercice la démonstration.

#### ► Remarque :

La famille  $(f_i)_i$  est une famille génératrice de  $\text{Vect}(f_1, \dots, f_k)$  par construction. C'est une base si et seulement si la famille est libre.

## 2.3 Dimension d'un espace vectoriel

### Théorème 2.6 (Dimension d'un espace vectoriel)

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel. Si  $E$  possède une famille génératrice finie, toutes les bases ont même cardinal appelé **dimension** de l'espace vectoriel  $E$ .

### Proposition 2.7

Si  $E$  est un espace vectoriel de dimension  $n$ , alors le cardinal d'une famille libre est inférieur ou égal à  $n$  et le cardinal d'une famille génératrice est supérieur ou égal à  $n$ .

### Théorème 2.8

Soient  $E$  un  $\mathbb{K}$  espace vectoriel de dimension  $n \geq 1$  et  $(e_1, \dots, e_n)$  une famille de  $n$  éléments de  $E$ . Alors les propositions suivantes sont équivalentes :

- $(e_1, \dots, e_n)$  est une base de  $E$ .
- $(e_1, \dots, e_n)$  est une famille génératrice de  $E$ .
- $(e_1, \dots, e_n)$  est une famille libre de  $E$ .

## 2.4 Représentation matricielle d'une famille de vecteurs et applications

### 2.4.1 Famille de vecteurs et matrices

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension  $n \geq 1$ . Soient  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$  une base de  $E$  et  $(f_1, \dots, f_p)$  une famille de vecteurs de  $E$ . On peut associer à cette famille une matrice  $A$  de  $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$  dont les coefficients de la  $j^{\text{ème}}$  colonne sont les coordonnées du vecteur  $f_j$  dans la base  $\mathcal{B}$ .

Réciproquement, si on se donne une matrice  $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ , on peut lui associer une famille de vecteurs  $(f_1, \dots, f_p)$  dont les coordonnées dans la base  $\mathcal{B}$  sont les vecteurs colonnes de la matrice  $A$ .

### Proposition 2.9

La famille  $(f_1, \dots, f_p)$  est libre si et seulement si  $\text{Ker}(A) = \{0_{\mathbb{R}^n}\}$ . La famille est génératrice si et seulement si  $\text{Im}(A) = \mathbb{R}^p$

### Définition 2.10 (Rang d'une famille de vecteurs)

Soit  $(f_1, \dots, f_p)$  une famille de  $p$  vecteurs d'un espace vectoriel  $E$ . On appelle **rang de la famille**  $(f_i)_i$ , la dimension de l'espace vectoriel  $\text{Vect}(f_1, \dots, f_p)$ .

► Le rang de la famille  $(f_1, \dots, f_p)$  est au plus égal à  $p$ .

### Définition 2.11 (Rang d'une matrice)

Soit  $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ . On appelle **rang de la matrice**  $A$  la dimension de l'espace vectoriel engendré par ses vecteurs colonnes. On le note  $\text{rang}(A)$ . C'est aussi la dimension de  $\text{Im}(A)$ .

### Proposition 2.12

Soit  $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$  et  $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ,  $Q \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$  deux matrices inversibles. Alors le rang des matrices  $A$ ,  $PA$  et  $AQ$  sont égaux :

$$\text{rang}(A) = \text{rang}(PA) = \text{rang}(AQ).$$

### Corollaire 2.13

Soit  $\mathcal{B}$  une base de  $E$ . Le rang de la famille  $(f_1, \dots, f_p)$  est égal au rang de la matrice des coordonnées des vecteurs  $f_i$  dans la base  $\mathcal{B}$ .

En particulier, pour déterminer le rang d'une famille de vecteurs il suffit de déterminer le rang de la matrice des coordonnées de ces vecteurs dans n'importe quelle base. Ca ne dépend pas de la base choisie.

### Proposition 2.14

Le rang de  $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$  est égal au rang de  ${}^tA \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ . Le rang de  $A$  est aussi égal à la dimension de l'espace vectoriel engendré par les vecteurs lignes de  $A$ .

### ► Remarque

Pour déterminer le rang d'une matrice, on lui applique le pivot de Gauss qui sont des opérations qui ne changent pas le rang et on lit le rang sur la matrice échelonnée.

### ► Exemple 1

Déterminer le rang de la matrice  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ .

► **Exemple 2**

Déterminer le rang de la matrice  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -4 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 3 & 9 & -9 \\ 3 & 5 & -1 & -8 & 0 \end{pmatrix}$ .

► **Exemple 3**

Déterminer le rang de la matrice  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & & & & 1 \\ \vdots & (1) & & \vdots & \\ 1 & & & & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

## 2.5 Sous espace vectoriel

### Définition 2.15

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel. On dit que  $F \subset E$  est un sous espace vectoriel de  $E$  si  $0_E \in F$  et pour tous  $x, y \in F, \lambda \in \mathbb{K}$

1.  $x + y \in F$ .
2.  $\lambda \cdot x \in F$ .

### Proposition 2.16

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel. L'espace  $F \subset E$  est un sous espace vectoriel de  $E$  si et seulement si  $0_E \in F$  et pour tous  $x, y \in F, \lambda \in \mathbb{K}, x + \lambda \cdot y \in F$ .

**Démonstration :**

► **Remarques :**

- Soit  $(e_1, \dots, e_k)$  un famille d'éléments d'un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel. L'espace engendré par les  $(e_i)$ ,  $\text{Vect}(e_1, \dots, e_k)$  est un sous espace vectoriel de  $E$ .
- **Attention  $\dim \text{Vect}(e_1, \dots, e_k) = k$  ssi la famille  $(e_1, \dots, e_k)$  est libre!!!**
- Un sous espace vectoriel d'un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel est un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel. On peut donc parler de dimension d'un sous espace vectoriel.
- Si  $F$  est un sous espace vectoriel de  $E$   $\mathbb{K}$ -ev de dimension  $n$ , alors

$$\dim F \leq n, \text{ de plus } \dim(F) = n \Leftrightarrow E = F.$$

**Définition 2.17**

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension  $n$ .

- Les sous espaces vectoriels de dimension 1 sont appelés des **droites**.
- Les sous espaces vectoriels de dimension 2 sont appelés des **plans**.
- Les sous espaces vectoriels de dimension  $n - 1$  sont appelés des **hyperplans**.

**2.5.1 Bases et théorème de la base incomplète**

**Proposition 2.18**

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension  $n \geq 1$ . Soient  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$  une base de  $E$  et  $(f_1, \dots, f_n)$  une famille de vecteurs de  $E$ . La famille  $\mathcal{B}' = (f_1, \dots, f_n)$  est une base de  $E$  si et seulement si la matrice  $P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}$  de  $M_n(\mathbb{K})$  dont les coefficients de la  $j^{\text{ème}}$  colonne sont les coordonnées du vecteur  $f_j$  dans la base  $\mathcal{B}$  est inversible. Cette matrice est alors appelée **la matrice de passage de la base  $\mathcal{B}$  à la base  $\mathcal{B}'$**

► **Remarque**

La matrice de passage  $P_{\mathcal{B}', \mathcal{B}}$  de la base  $\mathcal{B}'$  à la base  $\mathcal{B}$  n'est rien d'autre que  $P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}^{-1}$ .

**Proposition 2.19**

- Soit  $(f_1, \dots, f_p)$  une famille libre d'un espace vectoriel de dimension  $n$ . Alors  $p \leq n$  et si  $p = n$ ,  $(f_1, \dots, f_p)$  est une base de  $E$ .
- Soit  $(g_1, \dots, g_q)$  une famille génératrice de  $E$  espace vectoriel de dimension  $n$ . Alors  $q \geq n$  et si  $q = n$ ,  $(g_1, \dots, g_q)$  est une base de  $E$ .

**Théorème 2.20 (Théorème de la base incomplète)**

Soit  $p$  un entier positif,  $(f_1, \dots, f_p)$  une famille libre d'un espace vectoriel de dimension  $n$ . Soit  $(g_1, \dots, g_q)$  une famille génératrice de  $E$ . Alors il existe une base  $(e_1, \dots, e_n)$  de  $E$  telle que  $e_i = f_i$  pour tout  $i \leq p$  et  $e_i \in \{g_1, \dots, g_q\}$  pour tout  $i > p$ .

**Démonstration :** On raisonne par récurrence sur  $p$ . Si  $n = p$  il n'y a rien à faire. Si  $p < n$ , on regarde la famille  $(f_1, \dots, f_p, g_i)$  qui est libre pour un certain  $i$  sinon la famille  $(f_i)$  serait génératrice. la famille  $(g_1, \dots, g_q)$  est toujours génératrice et on continue...

**2.6 Sous espaces vectoriels remarquables**

**Proposition 2.21**

Soient  $F$  et  $G$  deux sous espaces vectoriels d'un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel  $E$ , alors  $H = F \cap G$  est un sous espace vectoriel de  $E$ .

Démonstration :

**Définition et Proposition 2.22**

Soient  $F$  et  $G$  deux sous espaces vectoriels d'un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel  $E$ .

On note  $H = F + G = \{x \in E \text{ tels que } x = y + z \text{ avec } y \in F, z \in G\}$ .

L'espace  $H$  est un sous espace vectoriel de  $E$  appelé **somme de  $F$  et  $G$** .

Démonstration :

**Proposition 2.23**

Soient  $F$  et  $G$  deux sous espaces vectoriels d'un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel  $E$ . Si  $(f_1, \dots, f_n)$  est une famille génératrice de  $F$  et  $(g_1, \dots, g_p)$  est une famille génératrice de  $G$  alors la famille  $(f_1, \dots, f_n, g_1, \dots, g_p)$  est une famille génératrice de  $H = F + G$ .

Démonstration :

**Définition 2.24 (Somme directe)**

Soient  $F$  et  $G$  deux sous espaces vectoriels d'un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel  $E$ . On dit que  $F$  et  $G$  sont en **somme directe** si  $F \cap G = \{O_E\}$ .

**Définition 2.25 (Sous espaces supplémentaires)**

Soient  $F$  et  $G$  deux sous espaces vectoriels d'un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel  $E$ . On dit que  $F$  et  $G$  sont **supplémentaires** dans  $E$  si  $E = F + G$  et si  $F$  et  $G$  sont en somme directe. On note  $E = F \oplus G$ .

### Proposition 2.26

Soient  $F$  et  $G$  deux sous espaces vectoriels d'un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel  $E$ . Les espaces  $F$  et  $G$  sont supplémentaires si et seulement si tout vecteur  $x \in E$  s'écrit de façon unique comme somme d'un vecteur de  $F$  et d'un vecteur de  $G$ . Autrement dit :

$$F \oplus G = E \iff \forall x \in E, \exists!(x_F, x_G) \in F \times G, x = x_F + x_G.$$

Démonstration :

### Théorème 2.27 (Caractérisation de supplémentaires en dimension finie)

Soient  $F$  et  $G$  deux sous espaces vectoriels d'un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel  $E$  de dimension finie. Les propositions suivantes sont équivalentes :

1.  $E = F \oplus G$ .
2.  $E = F + G$  et  $\dim(E) = \dim(F) + \dim(G)$ .
3.  $F \cap G = \{0_E\}$  et  $\dim(E) = \dim(F) + \dim(G)$ .

### Proposition 2.28

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie et  $F$  un sous espace vectoriel de  $E$ . Alors il existe au moins un sous espace vectoriel  $G$  de  $E$  tel que  $F$  et  $G$  soient supplémentaires.

Démonstration :

### Proposition 2.29

Soient  $F$  et  $G$  deux sous espaces vectoriels d'un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel  $E$ . On a

$$\dim(F + G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G).$$

Démonstration :

Voir le prochain chapitre.

### 3 Applications linéaires sur un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel

#### 3.1 Définitions et premières propriétés

##### Définition 3.1

Soit  $E$  et  $F$  deux  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels. On dit qu'une application  $u : E \rightarrow F$  est **linéaire** si

1. Pour tout  $x, y \in E$ ,  $u(x + y) = u(x) + u(y)$ .
2. Pour tout  $x \in E$  et tout  $\lambda \in \mathbb{K}$ ,  $u(\lambda x) = \lambda u(x)$ .

On note  $\mathcal{L}(E, F)$  ou  $\mathcal{L}(E)$  si  $F = E$  l'ensemble des applications linéaires de  $E$  dans  $F$ . Si  $E = F$ , on parle d'**endomorphisme** de  $E$ .

##### Proposition 3.2

Une application  $u : E \rightarrow F$  est **linéaire** si et seulement si

$$\forall x, y \in E, \lambda \in \mathbb{K}, \quad u(x + \lambda y) = u(x) + \lambda u(y).$$

##### ► Remarques :

– Si  $u$  est une application linéaire  $u(0_E) = 0_F$ .

– L'application  $Id_E : \begin{matrix} E & \rightarrow & E \\ x & \mapsto & x \end{matrix}$  est une application linéaire appelée **l'identité**.

##### Proposition 3.3

Soient  $E, F, G$  trois  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels.

–  $(\mathcal{L}(E, F), +, \cdot)$  est un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.

– La composée de deux applications linéaires est une application linéaire : si  $f \in (F, G)$ ,  $g \in \mathcal{L}(E, F)$  alors  $f \circ g \in \mathcal{L}(E, G)$  avec

$$\forall x \in E, \quad f \circ g(x) = f(g(x)).$$

##### ► Remarque :

Si  $E = F = G$ , et si  $f \in \mathcal{L}(E)$ , on peut définir pour  $n \in \mathbb{N}$  les applications linéaires  $f^{(n)}$  définies par

$$f^{(0)} = Id_E, \quad f^{(n)} = f \circ f^{(n-1)} = f^{(n-1)} \circ f = \underbrace{f \circ \dots \circ f}_{n \text{ fois}}.$$

On peut alors, pour tout polynôme  $P \in \mathbb{K}[X]$ ,  $P(X) = \sum_{i=0}^n a_i X^i$ , définir l'endomorphisme

$$P(f) = \sum_{i=0}^n a_i f^{(i)} \in \mathcal{L}(E).$$

On parle de polynôme d'endomorphisme.

**Attention**, en général, si  $f \in \mathcal{L}(E)$  et  $g \in \mathcal{L}(E)$ ,

$$f \circ g \neq g \circ f.$$

Prendre par exemple  $E = \mathbb{R}^2$  et  $f(x_1, x_2) = (x_1 + x_2, x_2)$  et  $g(x_1, x_2) = (0, x_2)$ .

### Définition 3.4

Soit  $E$  et  $F$  deux  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels. Soit  $u$  une application linéaire de  $E$  sur  $F$ . On appelle

- **Noyau de  $u$**  l'ensemble noté  $\text{Ker } u$  défini par

$$\text{Ker } u = \{x \in E \text{ tel que } u(x) = 0_E\}.$$

- **Image de  $u$**  l'ensemble noté  $\text{Im } u$  défini par

$$\text{Im } u = \{y \in F \text{ tel qu'il existe } x \in E \text{ tel que } y = u(x)\}.$$

### Proposition 3.5

Soit  $E$  et  $F$  deux  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels. Soit  $u$  une application linéaire de  $E$  sur  $F$ .

L'espace  $\text{Ker } u$  est un sous espace vectoriel de  $E$  et l'espace  $\text{Im } u$  est sous espace vectoriel de  $F$ .

**Démonstration :**

#### ► Exemple

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$  espace vectoriel et  $f \in \mathcal{L}(E)$  tel que  $f^2 + 2f + 2Id_E = 0$ . Montrer que  $\text{Ker } (f + Id_E) \oplus \text{Ker } (f + 2Id_E) = E$ .

### Définition 3.6

Soit  $E$  et  $F$  deux  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels. Soit  $u$  une application linéaire de  $E$  sur  $F$ . On appelle **rang** de  $u$  la dimension de l'espace vectoriel  $\text{Im}(u)$  et on le note  $\text{rg}(u)$ .

### ► Exemple :

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$  espace vectoriel de dimension finie. Soit  $f, g \in \mathcal{L}(E)$ , montrer que  $\text{rg}(f + g) \leq \text{rg}(f) + \text{rg}(g)$ .

### Proposition 3.7

Soit  $E$  et  $F$  deux  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels. Soit  $u$  une application linéaire de  $E$  sur  $F$ .

- L'application  $u$  est **injective** si et seulement si  $\text{Ker } u = \{0_E\}$ .
- L'application  $u$  est **surjective** si et seulement si  $\text{Im } u = F$ .
- L'application  $u$  est **bijective** si et seulement si  $\text{Ker } u = \{0_E\}$  et  $\text{Im } u = F$ . On parle alors d'**isomorphisme**, et d'**automorphisme** si  $F = E$ .

### Démonstration :

### Proposition 3.8

Soit  $u \in \mathcal{L}(E, F)$ .

1. L'image par  $u$  d'une famille génératrice de  $E$  est une famille génératrice de  $\text{Im } u$ .
2. L'image par  $u$  d'une famille liée est une famille liée de  $F$ .
3. Si  $u$  est **injective**, l'image par  $u$  d'une famille libre de  $E$  est une famille libre de  $F$ .

### Démonstration :

### **Proposition 3.9**

Soit  $E$  et  $F$  deux  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels et  $f$  une application linéaire de  $E$  dans  $F$ . On suppose que  $E$  est un espace vectoriel de dimension  $n$  et on considère  $(e_1, \dots, e_n)$  une base de  $E$ , alors pour tout  $x \in E$

$$f(x) = \sum_{i=1}^n x_i f(e_i), \text{ avec } x_1, \dots, x_n \text{ les coordonnées de } x.$$

Par conséquent, l'application linéaire  $f$  est entièrement déterminée par la donnée des  $f(e_i)$ .

**Démonstration :** On raisonne par récurrence sur la dimension  $n$  de  $E$ .

#### ► Exemple

Déterminer l'unique application linéaire  $f$  de  $\mathbb{R}^3$  dans  $\mathbb{R}^3$  telle que

$$\begin{aligned} f(e_1) &= 2e_1 + e_3 \\ f(e_2) &= e_1 + e_2 \\ f(e_3) &= e_3 \end{aligned}$$

### **Corollaire 3.10**

Soient  $E$  et  $F$  deux  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels de dimension finie. Alors  $\mathcal{L}(E, F)$  est un  $\mathbb{K}$  espace vectoriel de dimension finie et

$$\dim \mathcal{L}(E, F) = \dim E \times \dim F.$$

### **Proposition 3.11**

Soient  $E$  et  $F$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie. Soit  $\mathcal{B}$  une base de  $E$ .

Une application linéaire  $u \in \mathcal{L}(E, F)$  est bijective ssi l'image de cette base  $\mathcal{B}$  de  $E$  est une base de  $F$ .

**Démonstration :**

### Corollaire 3.12

Soient  $E$  et  $F$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie.

- Si  $u$  est un isomorphisme entre  $E$  et  $F$  alors  $\dim E = \dim F$ .
- Réciproquement si  $\dim E = \dim F$ , alors il existe un isomorphisme entre  $E$  et  $F$ .

## 3.2 Matrice d'une application linéaire

### 3.2.1 Définition

#### Définition 3.13

Soient  $E$  et  $F$  deux  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels de dimension  $p$  et  $n$ . On se donne  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$  une base de  $E$  et  $\mathcal{B}' = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$  une base de  $F$ . Soit  $f \in \mathcal{L}(E, F)$ . On appelle **matrice de  $f$  dans les bases  $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$**  la matrice notée  $\text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(f) \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$  dont les coefficients de la  $j^{\text{ème}}$  colonne sont les coordonnées de  $f(e_j)$  dans la base  $\mathcal{B}'$  :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(f) = (a_{ij}), \text{ avec } f(e_j) = a_{1j}\varepsilon_1 + \dots + a_{nj}\varepsilon_n.$$

Si  $E = F$  et  $\mathcal{B} = \mathcal{B}'$  on notera  $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ .

#### ► Exemples :

- L'application  $\begin{matrix} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) & \mapsto & (2x + 3y + 5z, x + y) \end{matrix}$  est linéaire. Déterminer sa matrice dans les bases canoniques des espaces.

- L'application  $\begin{matrix} \mathbb{R}_2[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ P & \mapsto & (P(0), P'(0)) \end{matrix}$  est linéaire. Déterminer sa matrice dans les bases canoniques des espaces.

### 3.2.2 Propriétés

#### Proposition 3.14

Soient  $E, F, G$  trois  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels de dimension finie. On se donne  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$  une base de  $E$ ,  $\mathcal{B}' = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$  une base de  $F$  et  $\mathcal{B}'' = (\eta_1, \dots, \eta_q)$  une base de  $G$ . Soit  $f \in \mathcal{L}(E, F)$ ,  $g \in \mathcal{L}(E, F)$ ,  $h \in \mathcal{L}(F, G)$  et  $\lambda \in \mathbb{K}$ . On a

1.  $\text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(f + g) = \text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(f) + \text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(g)$ .
2.  $\text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(\lambda f) = \lambda \text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(f)$ .
3.  $\text{Mat}_{\mathcal{B}', \mathcal{B}''}(h \circ f) = \text{Mat}_{\mathcal{B}', \mathcal{B}''}(h) \cdot \text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(f)$ .

### Corollaire 3.15

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel,  $\mathcal{B}$  une base de  $E$  et  $f \in \mathcal{L}(E)$  inversible, alors

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f^{-1}) = \left( \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) \right)^{-1}.$$

Réciproquement, si  $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$  est inversible alors  $f$  est inversible.

Si  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{B}'$  sont des bases de  $E$ , alors la matrice de passage  $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$  de  $\mathcal{B}$  à  $\mathcal{B}'$  est égale à  $\text{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(Id_E)$ .

### 3.2.3 Changement de bases

#### Théorème 3.16

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel,  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{B}'$  deux bases de  $E$  et  $x \in E$ , alors si  $X$  et  $X'$  désignent les coordonnées de  $x$  dans respectivement la base  $\mathcal{B}$  et la base  $\mathcal{B}'$  et si  $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$  désigne la matrice de passage de la base  $\mathcal{B}$  à la base  $\mathcal{B}'$ , alors

$$X = P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} X'$$

#### Théorème 3.17

Soient  $E, F$  deux  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels,  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{B}'$  deux bases de  $E$  et  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{C}'$  deux bases de  $F$ . Soit  $f \in \mathcal{L}(E, F)$ , alors si  $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$  désigne la matrice de passage de la base  $\mathcal{B}$  à la base  $\mathcal{B}'$  et  $Q_{\mathcal{C},\mathcal{C}'}$  désigne la matrice de passage de la base  $\mathcal{C}$  à la base  $\mathcal{C}'$  on a

$$\text{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f) = Q_{\mathcal{C},\mathcal{C}'} \text{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{C}'}(f) P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}^{-1} = Q_{\mathcal{B}',\mathcal{C}'} \text{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f) P^{-1}.$$

#### ► Remarque :

Ainsi les matrices  $\text{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)$  et  $\text{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{C}'}(f)$  sont équivalentes.

#### Théorème 3.18

Soit  $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$  de rang  $r$ . Alors  $A$  est équivalente à la matrice suivante

$$J_{r,n,p} = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$$

#### Démonstration :

### Corollaire 3.19

Deux matrices sont équivalentes ssi elles ont même rang.

► Deux matrices semblables ont même rang mais la réciproque est fausse!

### Théorème 3.20

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel,  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{B}'$  deux bases de  $E$ .

Soit  $f \in \mathcal{L}(E)$ , alors si  $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$  désigne la matrice de passage de la base  $\mathcal{B}$  à la base  $\mathcal{B}'$  on a

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} \text{Mat}_{\mathcal{B}'}(f) P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}^{-1} = P \text{Mat}_{\mathcal{B}''}(f) P^{-1}.$$

► **Remarque :**

Ainsi les matrices  $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$  et  $\text{Mat}_{\mathcal{B}'}(f)$  sont semblables. Autrement dit, deux matrices sont semblables si elles représentent le même endomorphisme dans deux bases différentes.

► **Exemple :**

Dans  $\mathbb{R}^3$  rapporté à sa base canonique, on considère l'endomorphisme  $f$  de matrice  $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 3 & -4 & 12 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$ .

1. Montrer que  $\text{Ker } f$ ,  $\text{Ker } (f - Id_E)$  et  $\text{Ker } (f - 2Id_E)$  sont des droites vectorielles et en déterminer une base.
2. Déterminer une nouvelle base dans laquelle la matrice de  $f$  est diagonale.

### 3.2.4 Théorème du rang

#### Proposition 3.21

Soient  $E$  un  $\mathbb{K}$ -ev de dimension finie et  $F$  un  $\mathbb{K}$ -ev quelconque. Soit  $f \in \mathcal{L}(E, F)$ .

Soit  $G$  un supplémentaire de  $\text{Ker } f$  dans  $E$ , alors la restriction de  $f$  à  $G$  réalise un isomorphisme de  $G$  dans  $\text{Im } f$ .

Démonstration :

**Théorème 3.22 (Théorème du rang)**

Soient  $E$  un  $\mathbb{K}$ -ev de dimension finie et  $F$  un  $\mathbb{K}$ -ev quelconque. Soit  $f \in \mathcal{L}(E, F)$ , on a

$$\dim(E) = \dim(\text{Ker}(f)) + \dim(\text{Im}(f)).$$

Démonstration :

► Conséquence :

Si  $\dim(E) = \dim(F)$ ,  $f$  bijectif  $\Leftrightarrow f$  injectif  $\Leftrightarrow f$  surjectif

► Exemples :

1. Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$  espace vectoriel de dimension finie  $n$ ,  $f, g \in \mathcal{L}(E)$  tels que  $f \circ g = 0$  et  $f + g \in GL(E)$ . Montrer que  $\text{rg}(f + g) = \text{rg}(f + g)$  et en déduire que  $\text{Im } f = \text{Ker } g$ .

2. Pour  $E$  ev de dimension finie et  $u \in \mathcal{L}(E)$ , montrer que les propositions suivantes sont équivalentes :

- (a)  $E = \text{Ker}(u) \oplus \text{Im}(u)$
- (b)  $E = \text{Ker}(u) + \text{Im}(u)$
- (c)  $\text{Ker}(u) \cap \text{Im}(u) = \{0\}$
- (d)  $\text{Ker}(u) = \text{Ker}(u^2)$
- (e)  $\text{Im}(u) = \text{Im}(u^2)$

### 3.3 Applications linéaires remarquables : formes linéaires, projecteurs

#### 3.3.1 Homothéties

##### Définition 3.23

Pour  $\lambda \in \mathbb{K}$ , on appelle **homothétie** de rapport  $\lambda$  l'endomorphisme  $f_\lambda \in \mathcal{L}(E)$  qui à tout  $x \in E$  associe  $f_\lambda(x) = \lambda x$ .

##### Proposition 3.24

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension  $n$ . Pour toute base  $\mathcal{B}$ , la matrice d'une homothétie de rapport  $\lambda$  est donnée par

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f_\lambda) = \lambda I_n.$$

**Démonstration :** Il suffit d'écrire que pour tout élément  $e$  de la base  $\mathcal{B}$ ,  $f(e) = \lambda e$ .

#### 3.3.2 Projecteur

##### Définition 3.25

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel. On dit que  $p \in \mathcal{L}(E)$  est un projecteur si  $p \circ p = p$ .

**Proposition 3.26**

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel. Si  $p \in \mathcal{L}(E)$  est un projecteur alors

- $E = \text{Im } p \oplus \text{Ker } p : \forall x \in E, x = p(x) + x - p(x)$  avec  $p(x) \in \text{Im } p$  et  $x - p(x) \in \text{Ker } p$ .
- $x \in \text{Ker } p$  ssi  $p(x) = 0$  et  $y \in \text{Im } p$  ssi  $p(y) = y$ .

Autrement dit, un projecteur n'est rien d'autre qu'une projection sur  $\text{Im } p$  parallèlement à  $\text{Ker } p$  :

$$\forall x \in E, x = x_{\text{Im}} + x_{\text{Ker}}, \text{ avec } x_{\text{Im}} \in \text{Im } p, x_{\text{Ker}} \in \text{Ker } p \text{ et } p(x) = x_{\text{Im}}.$$

**Démonstration :****► Exemples dans  $\mathbb{R}^3$** 

- Projection  $p$  sur une droite  $D$  de vecteur directeur  $\varepsilon_1$  :  $\dim(\text{Im } p) = 1$ . Il existe alors deux vecteurs  $\varepsilon_2, \varepsilon_3$  linéairement indépendants de  $\text{Ker } (p)$  tel que  $\mathcal{B}' = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$  soit une base de  $\mathbb{R}^3$ . De plus

$$M_{\mathcal{B}'}(p) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

- Déterminer la matrice dans la base canonique de  $\mathbb{R}^3$  de la projection  $p$  de  $\mathbb{R}^3$  sur  $D = \text{Vect } (\varepsilon_1)$  avec  $\varepsilon_1 = (1, -1, 0)$ , parallèlement au plan  $P = \text{Vect } (\varepsilon_2, \varepsilon_3)$  avec  $\varepsilon_2 = (0, 1, 1)$   $\varepsilon_3 = (1, 0, -1)$ .

### 3.3.3 Symétrie

#### Définition 3.27

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel. On dit que  $s \in \mathcal{L}(E)$  est une symétrie si  $s \circ s = Id_E$ .

#### Proposition 3.28

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel. Si  $s \in \mathcal{L}(E)$  est une symétrie alors

–  $E = \text{Ker}(s - Id_E) \oplus \text{Ker}(s + Id_E)$  :

$\forall x \in E, x = \frac{s(x) + x}{2} + \frac{x - s(x)}{2}$  avec  $\frac{s(x) + x}{2} \in \text{Ker}(s - Id_E)$  et  $\frac{-s(x) + x}{2} \in \text{Ker}(s + Id_E)$ .

– On peut remarquer que  $s = 2p - Id_E$  avec  $p \in \mathcal{L}(E)$  un projecteur. On dit que  $p$  est le projecteur associé à la symétrie  $s$  et réciproquement. On a

$$\text{Ker}(p) = \text{Ker}(s + Id_E) \quad \text{et} \quad \text{Im}(p) = \text{Ker}(s - Id_E).$$

#### ► Exemples dans $\mathbb{R}^3$

– Symétrie  $S$  par rapport à un plan  $P$  parallèlement à une droite  $D$ . On note  $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$  une base de  $P$  et  $\varepsilon_3$  un vecteur directeur de  $D$ . La famille  $\mathcal{B}' = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$  est alors une base de  $\mathbb{R}^3$  et

$$M_{\mathcal{B}'}(S) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

– Si  $\varepsilon_1 = (1, -1, 0)$ ,  $\varepsilon_2 = (0, 1, 1)$ ,  $\varepsilon_3 = (1, 0, -1)$ , la matrice de cette symétrie dans la base canonique est donnée par

$$M_{\mathcal{B}}(S) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

– On remarquera que  $-S$  est alors la symétrie par rapport à la droite  $D$  parallèlement au plan  $P$ .