

Devoir surveillé II - PSI**17 octobre 2011**

Les calculatrices sont autorisées.

Durée : 2 heures

EXERCICE, environ 25 mnSoit E le \mathbb{R} -espace vectoriel des applications de $[0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^1 sur $[0, 1]$ et telles que $f(0) = 0$.Soit N_∞ et $N'_\infty : E \rightarrow \mathbb{R}$ définies par :

$$N_\infty(f) = \sup_{t \in [0,1]} |f(t)|, \quad N'_\infty(f) = \sup_{t \in [0,1]} |f'(t)|.$$

On rappelle que N_∞ est une norme sur E .

1. Montrer que N'_∞ est une norme sur E .
2. Montrer que $\forall f \in E, \quad N_\infty(f) \leq N'_\infty(f)$.
3. Les normes N_∞ et N'_∞ sont-elles équivalentes sur E ?

PROBLEME, environ 1h35On considère l'algèbre $E = \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ muni de ses lois usuelles $+$, $.$, \times (le produit matriciel).On note $GL_4(\mathbb{R})$ le groupe (pour la loi \times) des matrices de E inversibles.

Pour $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$, on note $\text{Diag}(x, y, z, t) = \begin{pmatrix} x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & t \end{pmatrix}$, $O_4 = \text{Diag}(0, 0, 0, 0)$ la matrice nulle et

 $I_4 = \text{Diag}(1, 1, 1, 1)$ la matrice unité.On s'intéresse ici à certaines sous-algèbres de E .**Partie I**Soit $K \in E$, dont tous les coefficients valent 1.

1. Calculer K^2 et déterminer un polynôme, noté P , à coefficients réels de degré 2 annulateur de K .
2. Quelles sont les valeurs propres de K ? Vous justifierez avec soin.
3. Justifier que K est diagonalisable et déterminer ses sous-espaces propres. Vous justifierez avec soin.
4. Soit $M = xI_4 + yK$ avec $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Démontrer que M est diagonalisable, préciser ses valeurs propres et ses sous-espaces propres associés.
5. Démontrer que $F = \{xI_4 + yK, (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$ est un sous-espace vectoriel de E et déterminer sa dimension.
6. Soit $M = xI_4 + yK$ avec $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.
 - (a) Calculer M^n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, en fonction de n , I_4 et K .
 - (b) Déterminer à quelle condition M est inversible, et exprimer alors M^{-1} (en fonction de x , y , I_4 et K).

Partie II

On note toujours K l'élément de E dont tous les coefficients valent 1 et $Z = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Soit $H = \{aK + bZ, (a, b) \in \mathbb{R}^2\}$.

1. Démontrer que les quatres matrices K^2 , $K \times Z$, $Z \times K$ et Z^2 sont dans H . Que peut-on en déduire sur la structure algébrique de H ?
2. Justifiez que Z est diagonalisable, déterminer ses valeurs propres et ses sous-espaces propres. Vous justifierez avec soin.
3. Montrer, en utilisant la question précédente et la question I.3, qu'il existe $Q \in Gl_4(\mathbb{R})$ telle que $K' = Q^{-1}KQ$ et $Z' = Q^{-1}ZQ$ sont toutes les deux des matrices diagonales.
4. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, diagonaliser la matrice suivante :

$$\begin{pmatrix} a+b & a & a-b & a \\ a & a+b & a & a-b \\ a-b & a & a+b & a \\ a & a-b & a & a+b \end{pmatrix}.$$

Partie III

$$\text{Soit } A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -1 \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -1 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & -1 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer A^2 et A^3 . La famille (A, A^2, A^3) est-elle libre ?
2. Quel est le rang de A ? A est-elle semblable à $J = \text{Diag}(1, 1, 0, 0)$?
3. Déterminer un polynôme, noté R , à coefficients réels de degré 3 annulateur de A .
4. Préciser les valeurs propres de A .
5. Justifier que A est diagonalisable et montrer l'existence de trois matrices U, V et W de E et de deux réels a et b tels que $A = aU + bV$, avec

$$U + V + W = I_4, \quad U^2 = U, \quad V^2 = V, \quad W^2 = W,$$

et

$$U \times V = V \times U = U \times W = W \times U = V \times W = W \times V = O_4.$$

6. A est-elle semblable à $\text{Diag}(a, b, 0, 0)$, avec a et b à déterminer ?
7. Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ en fonction de A et A^2 .
8. On note $\text{Com}(A) = \{M \in E, A \times M = M \times A\}$.
 - (a) Montrer que $\text{Com}(A)$ est une sous-algèbre de E .
 - (b) Déterminer soigneusement sa dimension.
 - (c) Etudier s'il peut exister M dans E telle que $M^2 = A$.