

## Devoir surveillé IV - PSI

5 décembre 2011

Les calculatrices sont autorisées.

Durée : 2 heures

### EXERCICE I

1. Justifier la convergence de la série  $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{(2n+1)^2}$ . On note alors  $V = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$ .
2. Pour tout entier  $n \geq 1$ , on définit :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad D_n(x) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos(kx)$$

Démontrer que, pour tout entier  $n \geq 1$  et tout réel  $x \neq 0[2\pi]$ , on a :

$$D_n(x) = \frac{1}{2} \frac{\sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)x\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}.$$

3. Pour tout entier  $n \geq 1$ , on note  $L_n$  l'intégrale :  $L_n = \int_0^\pi x D_n(x) dx$ .

(a) Calculer l'intégrale  $\int_0^\pi x \cos(kx) dx$  pour tout entier  $k \geq 1$ .

(b) En déduire que

$$L_n = \frac{\pi^2}{4} + \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k - 1}{k^2}.$$

(c) En déduire que la suite  $(L_n)_n$  converge et exprimer sa limite en fonction du réel  $V$  défini dans la question 1.

4. On note  $f$  le prolongement par continuité en 0 de la fonction définie sur l'intervalle  $]0, \pi]$  par :

$$x \mapsto \frac{x}{\sin(x/2)}.$$

Montrer que  $f(0) = 2$  et démontrer que la fonction  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $[0, \pi]$ .

5. Soit  $\phi \in \mathcal{C}^1([0, \pi], \mathbb{R})$ . Démontrer que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \int_0^\pi \phi(x) \sin(nx) dx \right) = 0.$$

*On pourra faire une intégration par parties.*

6. Démontrer que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} L_n = 0$ .
7. En déduire la valeur de  $V$ .

## EXERCICE II

On rappelle que  $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \ln n + \gamma + o(1)$ . On pourra utiliser ce résultat sans démonstration.

On rappelle que pour tout nombre réel  $a$  strictement positif et  $x \in \mathbb{R}$ , on a :  $a^x = \exp(x \ln(a))$ .

### Question préliminaire

Soit  $x \in [1, +\infty[$  **fixé**, on pose  $h_x : t \in [1, +\infty[ \mapsto \frac{\ln t}{t^x}$ . Etudier la monotonie de la fonction  $h_x$ .

On pourra se servir de cette fonction pour diverses valeurs de  $x$  dans tout l'exercice.

On note  $F$  l'application définie par  $F(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$ .

1. Donner, sans démonstration, le domaine de définition de  $F$ .
2. Montrer que  $F$  est continue sur son domaine de définition.
3. Justifier que  $F$  admet une limite en  $+\infty$  et déterminer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$ .
4. Pour  $n \geq 1$ , on considère les applications  $v_n$  et  $w_n$  de  $[1, +\infty[$  vers  $\mathbb{R}$  définies par :

$$v_n(x) = \frac{1}{n^x} - \frac{1}{(n+1)^x} \quad \text{et} \quad w_n(x) = \frac{1}{n^x} - \int_n^{n+1} \frac{1}{t^x} dt.$$

- a. Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ , justifier que  $v_n \in \mathcal{C}^1$  sur  $[1, +\infty[$  et calculer  $v_n'(x)$  pour  $x \in [1, +\infty[$ .
  - b. Montrer que  $\forall n \geq 3, \forall x \in [1, +\infty[, v_n'(x) \leq 0$ . (On pourra utiliser la fonction  $h_x$ ).
  - c. En déduire que pour  $n \geq 3, v_n$  est bornée sur  $[1, +\infty[$  et calculer  $\|v_n\|_{\infty, [1, +\infty[}$ .
5. a. Pour  $n \geq 1$ , déterminer  $w_n(x)$  pour  $x \in ]1, +\infty[$  et  $w_n(1)$ .
  - b. Montrer que pour  $n \geq 1, w_n$  est continue sur  $[1, +\infty[$ .
  - c. Montrer que  $\forall x \geq 1, \forall n \geq 1, 0 \leq w_n(x) \leq v_n(x)$ .
  - d. Déduire des questions précédentes, que la série de fonctions  $\sum_{n \geq 3} w_n$  est normalement convergente sur  $[1, +\infty[$ .
  - e. On considère la fonction  $W$  définie par  $W = \sum_{n=1}^{+\infty} w_n$ .  
Démontrer que  $W$  est définie et continue sur  $[1, +\infty[$ .
6. a. Montrer que  $\forall x > 1, W(x) = F(x) + \frac{1}{1-x}$ .
  - b. Justifier que  $\lim_{x \rightarrow 1^+} \left( F(x) + \frac{1}{1-x} \right) = W(1)$
  - c. Montrer que  $W(1) = \gamma$ .

On a ainsi établi que :

$$F(x) = \frac{1}{x-1} + \gamma + o(1).$$