Programme de colles n°3- Semaine du 26 septembre au 1er octobre

Algèbre linéaire : Compléments

- **Somme d'espaces vectoriels. Somme directe.**
  - La somme de sous-espaces vectoriels E_i de E est un sev de E. C'est le sev Vect $(\cup E_i)$.
  - Def : La somme est directe ssi $(\sum_{i=1}^{p} x_i = 0_E \Longleftrightarrow \forall i\, x_i = 0_E)$.
  - Exemple : Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $\deg(P) \geqslant 1$ et $n = \deg(P) - 1$. Le sev $P\mathbb{K}[X]$ et $\mathbb{K}_n[X]$ sont supplémentaires dans $\mathbb{K}[X]$.
  - Si E est de dimension finie alors : la somme $\sum_{i=1}^{p} E_i$ est directe ssi $\dim \sum_{i=1}^{p} E_i = \sum_{i=1}^{p} \dim E_i$.

    En particulier $\dim \oplus_{i=1}^{p} E_i = \sum_{i=1}^{p} \dim E_i$.
  - Bases adaptées à une somme directe et présentation du calcul matriciel par bloc.
  - Pour $E = \oplus_{i=1}^{p} E_i$, on définit les projecteurs associés à la somme directe. Les p_j définis ci-dessus sont des projecteurs, i.e. elles sont linéaires et ${p_j}^2 = p_j$. Elles vérifient de plus : $p_i \circ p_j = 0_{\mathcal{L}(E)}$ si $i \neq j$ et $Id_E = \sum_{j=1}^{p} p_j$ et réciproquement.

- **Polynôme de Lagrange**
  - Les polynômes interpolateur de Lagrange sont définis par :

    $$\forall k \in [|0, n|], \quad L_k(X) = \prod_{i=0, i\neq k}^{n} \frac{X - a_i}{a_k - a_i}$$

    Ils sont associés à la famille de scalaires deux à deux distincts $(a_k)_{0 \leqslant k \leqslant n}$. Ils vérifient :
    - $\forall (i,k) \in [|0,n|]^2, \quad L_k(a_i) = \delta_i^k$,
    - $\forall k \in [|0,n|], \quad \deg(L_k) = n$,
    - $(L_0, \ldots, L_n)$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.
  - Soit $n \in \mathbb{N}$, $(a_0, \ldots, a_n)$ n scalaires deux à deux distincts. Pour tout $(\lambda_0, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$, il existe un unique polynôme $P \in \mathbb{K}_n[X]$ tel que $P(a_i) = \lambda_i$ pour $i = 0 \ldots n$. De plus P vérifie $P(X) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i L_i(X)$.

- **Dualité**
  - ► Définition de E^*. E^* est un $\mathbb{K}$-ev
  - Les formes linéaires coordonnées dans un ev de dimension finie forment une base de E^*. Ainsi $\dim E^* = \dim E$.
  - Exemples sur $\mathbb{R}^3$, Interpolation de Lagrange.
  - Base préduale. Exemple : les formes linéaires valuations sur $\mathbb{R}_n[x]$.

- **Hyperplan :**
  - Définition : Tout espace qui admet un supplémentaire de dimension 1.
  - Caractérisation à l'aide du noyau d'une forme linéaire.
  - Soit e un vecteur de E, de dimension finie, e non nul alors il existe une forme linéaire φ sur E telle que $\varphi(e) = 1$.
  - Recherche de base d'hyperplan.

- **Trace** d'une matrice
  - $\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$ et définition de la trace d'un endomorphisme.
  - Pour un projecteur en dimension finie, $\mathrm{Tr}(p) = \mathrm{rg}(p)$.

E est un $\mathbb{K}$ ev, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

- **Normes**
  Définition de norme et distance associée.
  Définition d'une boule ouverte ou fermée autour d'un point.
  Cas de la dimension finie : normes N_1, N_2, N_∞.
  Cas de la dimension infinie : norme de la convergence uniforme.
  Norme $||.||_1$, $||.||_2$ et $||.||_\infty$ sur $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{K})$.
- **Suite dans un evn.**
  Convergence. Unicité de la limite.
  Une suite convergente est bornée.
  L'ensemble des suites convergentes est un $\mathbb{K}$ ev. Linéarité de la limite.
  Suite de Cauchy. Définition.
  Définition de valeur d'adhérence pour une suite.
  Relations entre suite extraite, suite convergente, suite de Cauchy.
  a)Toute suite convergente est une suite de Cauchy.
  b)Une suite extraite d'une suite convergente converge aussi vers la même limite.
  c) Une suite extraite d'une suite de Cauchy est encore une suite de Cauchy.
  d) Une suite de Cauchy a au plus une valeur d'adhérence a et dans ce cas, elle converge vers a.
  Suites dans un evn de dimension finie
  Comparaison de suites
  Théorème de Bolzano-Weiertrass.
  Complétude de $\mathbb{R}$ et donc de $\mathbb{R}^n$ (Admise dans $\mathbb{R}^n$).
  Complétude en dimension finie (Admis).