Programme de colles n°4- Semaine du 3 au 8 octobre

Espaces vectoriels normés

E est un $\mathbb{K}$ ev, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

- **Normes**
  Définition de norme et distance associée.
  Définition d'une boule ouverte ou fermée autour d'un point.
  Cas de la dimension finie : normes N_1, N_2, N_∞.
  Cas de la dimension infinie : norme de la convergence uniforme.
  Norme $||.||_1$, $||.||_2$ et $||.||_\infty$ sur $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{K})$.
- **Suite dans un evn.**
  Convergence. Unicité de la limite.
  Une suite convergente est bornée.
  L'ensemble des suites convergentes est un $\mathbb{K}$ ev. Linéarité de la limite.
  Suite de Cauchy. Définition.
  Définition de valeur d'adhérence pour une suite.
  Relations entre suite extraite, suite convergente, suite de Cauchy.

  a)Toute suite convergente est une suite de Cauchy.
  b)Une suite extraite d'une suite convergente converge aussi vers la même limite.
  c) Une suite extraite d'une suite de Cauchy est encore une suite de Cauchy.
  d) Une suite de Cauchy a au plus une valeur d'adhérence a et dans ce cas, elle converge vers a.
  Suites dans un evn de dimension finie
  Comparaison de suites
  Théorème de Bolzano-Weiertrass.
  Complétude de $\mathbb{R}$ et donc de $\mathbb{R}^n$ (Admise dans $\mathbb{R}^n$).
  Complétude en dimension finie (Admis).
  Etude des suites $u_{n+1} = f(u_n)$.
  Etude des suites récurrentes linéaires d'ordre 2.
- Définitions et exemples d'**applications lipschitziennes.**
- **Comparaison des normes.**
  - Normes équivalentes. Définition.
  - Sur $\mathbb{K}^n$ les normes $||.||_1$, $||.||_2$ et $||.||_\infty$ sont équivalentes.
  - En dimension finie toutes les normes sont équivalentes (admis).
  - Sur $\mathcal{C}([a,b])$, $||.||_1$, $||.||_2$ et $||.||_\infty$ ne sont pas équivalentes, mais on a les inégalités $||.||_1 \leqslant \sqrt{b-a}||.||_2 \leqslant (b-a)||.||_\infty$.
- **Parties ouvertes et fermées** dans un evn.
  Seules les définitions ont été vues avec des exemples simples.
- **Distance d'un point** à une partie non vide A de E.
  $x \in \bar{A} \iff d(x,A) = 0$. La distance $d(.,A)$ est une application lipschitzienne.

Le groupe symétrique

- Définition d'une permutation de $\{1,...,n\}$ et du groupe $(S_n, \circ)$.
- Transposition.
  Décomposition d'une permutation en produit de transpositions sur des exemples et algorithme sur des exemples.
- Cycles. Décomposition de permutation en cycles à support disjoints (slt sur des exemples).
- Signature (qui ne dépend pas de la décomposition en transpositions, admis). Morphisme de groupe de $(S_n, \circ)$ dans $(\{1,-1\}, *)$.