

Programme de colles n°5- Semaine du 10 au 15 octobre

Espaces vectoriels normés

E est un \mathbb{K} ev, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} .

- Définitions et exemples d'applications lipschitziennes.
- **Comparaison des normes.**
Normes équivalentes. Définition.
Sur \mathbb{K}^n les normes $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$ sont équivalentes.
En dimension finie toutes les normes sont équivalentes (admis).
► Sur $\mathcal{C}([a, b])$, $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$ ne sont pas équivalentes, mais on a les inégalités $\|\cdot\|_1 \leq \sqrt{b-a} \|\cdot\|_2 \leq (b-a) \|\cdot\|_\infty$.
- **Parties ouvertes et fermées** dans un evn.
Seules les définitions ont été vues avec des exemples simples.
- **Distance d'un point** à une partie non vide A de E .
 $x \in \bar{A} \iff d(x, A) = 0$. La distance $d(\cdot, A)$ est une application lipschitzienne.

Le groupe symétrique

- Définition d'une permutation de $\{1, \dots, n\}$ et du groupe (S_n, \circ) .
- Transposition. Décomposition d'une permutation en produit de transpositions (démonstration non exigible).
- Cycles. Décomposition de permutation en cycles à supports disjoints (slt sur des exemples).
- Signature (qui ne dépend pas de la décomposition en transpositions, admis). Morphisme de groupe de (S_n, \circ) dans $(\{1, -1\}, *)$.

Déterminants

- **Applications multilinéaires**
Définition. Exemples de bilinéaire.
Applications multilinéaires alternées (définition).
Caractérisation à l'aide des permutations.
Une application multilinéaire alternée reste inchangée par une addition sur l'une de ses variables d'une combinaison linéaire des autres. Une application multilinéaire alternée est nulle sur une famille liée.
- **Déterminant d'une famille de vecteurs**
Existence d'une unique forme n -linéaire alternée sur E^n de dimension n qui vérifie $f(B) = 1$ où B est une base de E (démonstration non exigible).
Déterminant d'une famille de vecteurs dans une base. Il est non nulle ssi la famille est une base.
- **Déterminant d'un endomorphisme** (indépendant de la base choisie). Déterminant d'une composition. Déterminant de f^{-1} , λf .
- **Déterminant d'une matrice carrée**
Déterminant d'une matrice triangulaire supérieure.
Méthode du pivot de Gauss pour la calcul du déterminant.
Développement par rapport à une ligne ou une colonne.
Exemples classiques : VanderMonde et tridiagonaux.
Formule d'inversion avec la comatrice (la démonstration n'est pas exigible).
- **Applications** : Système de Cramer, Orientation d'un espace vectoriel de dimension finie.

– **Sous-espaces stables.**

Définition d'un sev stable par un endomorphisme.

► Si u et v sont deux endomorphismes qui commutent, alors : $\text{Ker}(u)$ et $\text{Im}(u)$ sont stables par v (et réciproquement).

Dans E espace vectoriel de dimension finie, la matrice de u dans une base adaptée à F sous-espace stable s'écrit sous la forme d'une matrice triangulaire par bloc. De plus $\det(A) = \det(M_1) \det(M_2)$.

– **Polynômes d'endomorphismes et de matrices.**

Définitions.

L'application $\varphi_u : \begin{cases} \mathbb{K}[X] & \longrightarrow \mathcal{L}(E) \\ P & \longmapsto P(u) \end{cases}$ est un morphisme d'algèbres unitaires de $\mathbb{K}[X]$ dans $\mathcal{L}(E)$.

Définition d'un polynôme annulateur.

► Soit E un \mathbb{K} -ev de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$; Alors u admet au moins un polynôme annulateur non nul.

Définition d'un idéal de $\mathbb{K}[X]$.

Thm : Les idéaux de $\mathbb{K}[X]$ sont de la forme $P\mathbb{K}[X]$ avec $P \in \mathbb{K}[X]$.

Thm : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, on considère le morphisme $\varphi_u : \mathbb{K}[X] \rightarrow \mathcal{L}(E)$, $P \mapsto P(u)$. Alors $\text{Ker } \varphi_u$ est un idéal de $\mathbb{K}[X]$ et $\text{Ker } \varphi_u$ est l'idéal des polynômes annulateurs de f .

Thm : Si E est de dimension finie, il existe $\pi_u \in \mathbb{K}[X] \setminus \{0\}$ unitaire, unique tel que :

$$\{P \in \mathbb{K}[X], P(u) = 0\} = \pi_u \mathbb{K}[X].$$

π_u est appelé le polynôme minimal de f .

– **Valeurs propres et vecteurs propres**

► Définition de valeurs propres et vecteurs propres pour un endomorphisme.

► Définition du spectre sur le corps de base.

► Définition des sous-espaces propres. Ceux sont des sev de E .

Remarque sur la valeur propre 0.

► **Thm** : En dimension finie, λ est une valeur propre ssi $(u - \lambda Id_E)$ est non inversible.

► **Thm** : Si deux endomorphismes u et v commutent, alors les sous-espaces propres de u sont stables par v et réciproquement.

► **Thm** : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et $(\lambda_1, \dots, \lambda_p)$ une famille de valeurs propres de u distinctes deux à deux. Alors, la somme

$\sum_{i=1}^p E_{\lambda_i}(u)$ est directe. *Les sous-espaces propres sont en somme directe.*

► **Thm** : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et $P \in \mathbb{K}[X]$. Si λ est une valeur propre de u , alors $P(\lambda)$ est une valeur propre de $P(u)$. Si $P(u) = 0$, toute valeur propre de u est racine de P . *Tout polynôme annulateur de u possède les valeurs propres parmi ses racines.*