Programme de colles n°6- Semaine du 17 au 22 octobre

Déterminants

- **Applications multilinéaires**
  Définition. Exemples de bilinéaire.
  Applications multilinéaires alternées (définition).
  Caractérisation à l'aide des permutations.
  Une application multilinéaire alternée reste inchangée par une addition sur l'une de ses variables d'une combinaison linéaires des autres. Une application multilinéaire alternée est nulle sur une famille liée.
- **Déterminant d'une famille de vecteurs**
  Existence d'une unique forme n-linéaire alternée sur E^n de dimension n qui vérifie $f(B) = 1$ où B est une base de E (démonstration non exigible).
  Déterminant d'une famille de vecteurs dans une base. Il est non nulle ssi la famille est une base.
- **Déterminant d'un endomorphisme** (indépendant de la base choisie). Déterminant d'une composition. Déterminant de f^{-1}, λf.
- **Déterminant d'une matrice carrée**
  Déterminant d'un matrice triangulaire supérieure.
  Méthode du pivot de Gauss pour la calcul du déterminant.
  Développement par rapport à une ligne ou une colonne.
  Exemples classiques : VanderMonde et tridiagonaux.
  Formule d'inversion avec la comatrice (la démonstration n'est pas exigible).
- **Applications** : Système de Cramer, Orientation d'un espace vectoriel de dimension finie.

Réduction d'endomorphisme

- **Sous-espaces stables.**
  Définition d'un sev stable par un endomorphisme.
  ▶ Si u et v sont deux endomorphismes qui commutent, alors : $Ker(u)$ et $Im(u)$ sont stables par v (et réciproquement).
  Dans E espace vectoriel de dimension finie, la matrice de u dans une base adaptée à F sous-espace stable s'écrit sous la forme d'une matrice triangulaire par bloc. De plus $\det(A) = \det(M_1)\det(M_2)$.
- **Polynômes d'endomorphismes et de matrices.**
  Définitions.
  L'application $\varphi_u : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{K}[X] & \longrightarrow & \mathcal{L}(E) \\ P & \mapsto & P(u) \end{array} \right.$ est un morphisme d'algèbres unitaires de $\mathbb{K}[X]$ dans $\mathcal{L}(E)$.
  ▶ Définition d'un polynôme annulateur.
  ▶ Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$; Alors u admet au moins un polynôme annulateur non nul.
  Définition d'un idéal de $\mathbb{K}[X]$.
  Thm : Les idéaux de $\mathbb{K}[X]$ sont de la forme $P\mathbb{K}[X]$ avec $P \in \mathbb{K}[X]$.
  ▶ **Thm** : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, on considère le morphisme $\varphi_u : \mathbb{K}[X] \to \mathcal{L}(E)$, $P \mapsto P(u)$. Alors Ker φ_u est un idéal de $\mathbb{K}[X]$ et Ker φ_u est l'idéal des polynômes annulateurs de f.
  Thm : Si E est de dimension finie, il existe $\pi_u \in \mathbb{K}[X] \setminus \{0\}$ unitaire, unique tel que :

$$\{P \in \mathbb{K}[X], P(u) = 0\} = \pi_u\mathbb{K}[X].$$

  π_u est appelé le polynôme minimal de f.

- **Valeurs propres et vecteurs propres**
  ▶ Définition de valeurs propres et vecteurs propres pour un endomorphisme.
  ▶ Définition du spectre sur le corps de base.
  ▶ Définition des espaces propres. Ceux sont des sev de E.
  Remarque sur la valeur propre 0.
  ▶ Exemples : $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}) \mapsto f'$, $P \in \mathbb{K}[X] \mapsto P(X+1) - P(X)$.
  ▶ **Thm** : En dimension finie, λ est une valeur propre ssi $(u - \lambda Id_E)$ est non inversible.
  ▶ **Thm** : Si deux endomorphismes u et v commutent, alors les sous-espaces propres de u sont stables par v et réciproquement.
  ▶ **Thm** : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et $(\lambda_1, \ldots, \lambda_p)$ une famille de valeurs propres de u distinctes deux à deux. Alors, la somme $\displaystyle\sum_{i=1}^{p} E_{\lambda_i}(u)$ est directe. *Les sous-espaces propres sont en somme directe.*
  ▶ **Thm** : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et $P \in \mathbb{K}[X]$. Si λ est une valeur propre de u, alors $P(\lambda)$ est une valeur propre de $P(u)$.
  Si $P(u) = 0$, toute valeur propre de u est racine de P. *Tout polynôme annulateur de u possède les valeurs propres parmi ses racines.*
  ▶ **Thm** : Les matrices semblables ont même spectre.
- **Polynôme caractéristique** d'un endomorphisme.
  E est un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$.
  Définition du polynôme caractéristique de u.
  ▶ **Thm** : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, $\lambda \in SP(u) \Leftrightarrow P_u(\lambda) = 0$.
  Thm : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On suppose que $E' \subset E$ est stable par u. On note u' la restriction de u à E'. Alors : $P_{u'}(X)$ divise $P_u(X)$.
  Si $E = E_1 \oplus E_2$ et si u stabilise cette somme directe, alors, en notant u_i la restriction de u à E_i : $P_u(X) = P_{u_1}(X)P_{u_2}(X)$.
  ▶ **Thm** : Si λ est valeur propre de u de multiplicité m , alors $1 \leqslant \dim E_\lambda(u) \leqslant m$.
  Théorème de Cayley-Hamilton (Admis).
- **Réduction d'un endomorphisme en dimension finie.**
  Définition d'un endomorphisme diagonalisable.
  Thm : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Les propriétés suivantes sont deux à deux équivalentes :
  a) u est diagonalisable
  b) Il existe une base de vecteur propre.
  c) Il existe une base dans laquelle sa matrice est diagonale.
  d) $\dim(E) = \displaystyle\sum_{\lambda \in Sp(u)} \dim(E_\lambda(u))$.

  Thm : u est diagonalisable ssi il existe un polynôme annulateur scindé sur $\mathbb{K}$ à racines simples. (Admis)
  Thm : Soit $f \in \mathcal{L}(E)$, f est diagonalisable ssi : $\left\{ \begin{array}{l} \text{-}\chi_f \text{ est scindé sur } \mathbb{K} \\ \text{-Pour chaque valeur propre } \lambda,\ E_\lambda \text{ est de dimension} \\ \text{l'ordre de multiplicité de } \lambda \text{ dans le polynôme} \\ \text{caractéristique.} \end{array} \right.$
- Définition d'un endomorphisme **trigonalisable.**
  Aucun résultat général n'est au programme.
- **Applications de la réduction** :
  a) Calcul des puissances d'une matrice carrée.
  b) Suites récurrentes linéaires à coefficients constants.
  c) Commutant d'un endomorphisme diagonalisable.