Programme de colles n°8- Semaine du 14 au 19 novembre

Séries de nombres réels ou complexes.

– **Notion de série**, somme partielle.
▶ Définitions de la convergence ou la divergence d'une série.
L'ensemble des séries convergentes est un espace vectoriel.
▶ **Thm** : Condition nécessaire de convergence : Si la série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ converge, alors $\lim_{n\longrightarrow+\infty} u_n = 0$.
Lorsque $u_n \nrightarrow_{n\to+\infty} 0$, on dit que la série **diverge grossièrement**.
Définition du reste d'ordre n d'une série convergente qui tend vers zéro :
Si $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ est une série à termes dans $\mathbb{K}$ **convergente**, on définit : $\forall n \in \mathbb{N}$, $r_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k$, appelé le **reste d'ordre** n de la série. ▶ $\lim_{n\to+\infty} r_n = 0$.
Critère de convergence de Cauchy.
– **Séries à termes positifs.**
On se place dans le cas particulier où les suites (u_n) sont réelles et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant 0$.
▶ **Thm** : Une série à termes positifs converge ssi la suite des sommes partielles est majorée.
Si, à partir d'un certain rang on a $0 \leqslant u_n \leqslant v_n$ alors :
– si $\sum u_n$ diverge alors $\sum v_n$ diverge,
– si $\sum v_n$ converge alors $\sum u_n$ converge.
▶ Séries de Riemann. CNS de convergence avec démonstration.
Critère important pour obtenir une convergence ou une divergence avec la régle du $n^\alpha u_n$.
Règle de d'Alembert pour la convergence ou la divergence de séries à termes positifs. La démonstration n'est pas exigible.
– **Séries de nombres réels ou complexes**
On considère $\sum u_n$ une série d'éléments de $\mathbb{K}$.
▶ Définition de la convergence absolue (ACV).
- Une série ACV est CV.
▶ Exemples : série géométrique, série exponentielle (admis pour l'égalité avec l'exponentielle).
- Si $\sum_{n\geqslant 0} v_n$ est absolument convergente et $u_n = O(v_n)$ alors $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ est absolument convergente.
- Si $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant v_n$ et $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$ alors les deux séries sont de même nature.
– **Séries alternées.**
▶ **Thm** Si le terme général u_n vérifie :

1	$\forall n \geqslant n_0$, $u_n u_{n+1} < 0$	(le signe alterne)
2	$(\lvert u_n\rvert)_{n\in\mathbb{N}} \searrow$	(le module décroît)
3	$\lim_{n\longrightarrow+\infty} u_n = 0$	(u_n tend vers 0)

Alors la série $\sum u_n$ converge.
De plus, $|r_p| < |u_{p+1}|$ et r_p est de même signe que u_{p+1}.
Démonstration exigible de la première partie du thm ($\sum_{n\geqslant 0} u_n$ converge).
Exemples classiques et utilisation des développements limités.
– **Comparaison Série-intégrale.**
Thm Si f est une fonction continue par morceaux, décroissante, de $[0, +\infty[$ à valeurs dans $\mathbb{R}^+$ alors la série de terme général $w_n = f(n) - \int_n^{n+1} f(t)\mathrm{d}t$ pour $n \geqslant 1$ est convergente. En particulier la série $\sum f(n)$ converge ssi $\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ admet une limite quand $x \longrightarrow +\infty$.
Exemples : la constante d'Euler, Formule de Stirling à l'aide des intégrales de Wallis.

Limite et continuité dans un evn

Soit $f : A \to F$, E et F deux evn. A une partie de E et $a \in \bar{A}$.

- **Limites**
  Définition de la limite d'une application en un point.
  Si F est de dimension finie, définition à l'aide des applications coordonnées.
  Thm : Caractérisation séquentielle des limites.
  L'ensemble des applications de A dans F ayant une limite en a adhérent à A est un $\mathbb{K}$-ev et $f \mapsto \lim\limits_{a} f$ est linéaire.
  Comparaison des fonctions à une application à valeurs non nulle : o et O.
- **Continuité** de f en $a \in A$.
  ▶ Exemples sur des fonctions à une ou deux variables variables.
  Continuité sur un ensemble.
  ▶ Exemple : Application polynomiale, det continue sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
  Opérations sur la continuité : structure d'ev, composition.
  Lipchitzienne implique continue.
  ▶ Exemple : La norme est continue sur E.
  Thm : La pré-image d'un ouvert (resp. fermé) par une application continue est un ouvert (resp. fermé).
  (Thm admis)
  ▶ Exemples : l'intérieur d'une ellipse est un ouvert de $\mathbb{R}^2$. $GL_n(\mathbb{K})$ est un ouvert de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
- **Compacité en dimension finie.**
  ▶ Définition : Un compact est un fermé borné en dimension finie.
  ▶ Exemples : La sphére unité ou la boule unité fermée sont des parties compactes de E.
  ▶ **Thm** L'image d'un compact par une application continue est compacte. (Admis)
  Corollaire : Si f est continue sur A compact à valeurs réelles alors f est bornée sur A et atteint ses bornes, autrement dit il y a existence de $\min\limits_{A} f$ et $\max\limits_{A} f$.