Programme de colles n°13- Semaine du 3 au 8 janvier

Intégration sur un intervalle.

Intégrales impropres

- Définition de $\int_{[a,b[} f(t)\,dt$ convergente, de $\int_{]a,b]} f(t)\,dt$ convergente et $\int_{]a,b[} f(t)\,dt$ convergente.
  ► **Thm** Si f est CPM sur $[a,b[$ et prolongebale par continuité en b alors $\int_{[a,b[} f(t)\,dt$ est convergente. (Démon non exigible).
- Propriétés : linéarité, positivité, croissance.

Intégrale absolument convergente

- Définition.
- Propriétés : linéarité, positivité, croissance.
- Définition d'intégrale semi-convergente.
  ► $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$ est semi-convergente avec démonstration.

Intégrale des fonctions positives

- Théorème de comparaison.
- Théorème des équivalents.
- ► Exemple fondamentaux : critère de Riemann en $+\infty$ et en 0, fonction exponentielle, fonction ln sur $]0,1]$.
  Toutes ces exemples sont à connaitre ainsi que les démonstrations !
- ► Introduction à la fonction gamma avec recherche de son domaine de définition $\forall x > 0,\ \Gamma(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\,dt$.

Propriétés

Linéarité,

Inégalité de la moyenne,

Relation de Chasles,

Changement de variables bijectif.

Les démonstrations ne sont pas exigibles.

Rappel Théorème de comparaison série et intégrale.

► Application aux séries de Riemann et aux séries de Bertrand.

Pour les séries de Bertrand, vous devez savoir redémontrer les résultats car elles ne sont pas au programme.

Espaces vectoriels normés des fonctions intégrales.

► Construction de la norme 1 sur $L^1(I)$.

Intégrale et intervertion de limites

- Thm de la convergence dominée. (Admis)
- Théorème d'inversion séries et intégrale sur un intervalle.
  ► Ces théorèmes sont admis mais les énoncés doivent être sus et compris !
- Intégrale dépendant d'un paramètre.
  Thm de continuité et de dérivabilité sous le signe $\int$.
  ► Ces théorèmes sont admis mais les énoncés doivent être sus et compris !
  ► Application à l'étude de la fonction Γ.