

DEVOIR LIBRE 1

Ce devoir est à rendre lors du premier cours de mathématiques de l'année scolaire 2010-2011. Il couvre une grande partie du programme de première année. Je vous demande d'apporter un soin très important à la rédaction. Tout résultat doit être correctement justifié.

Si vous rencontrez des difficultés, n'hésitez pas à me contacter par mail à l'adresse

bourdon.jeremie@lycee-militaire-aix.fr.

Je vous souhaite de bonnes vacances et vous donne rendez-vous (en grande forme !) en septembre.

Exercice 1

Pour tout entier n on note :

$$I_n = \int_0^1 e^{-x^2} (1-x)^n dx \quad \text{et} \quad J_n = \int_0^1 x e^{-x^2} (1-x)^n dx.$$

1. (a) Former le tableau de variation sur $[0,1]$ de la fonction $x \mapsto x e^{-x^2}$.
- (b) En déduire pour tout n de \mathbb{N} :

$$0 \leq J_n \leq \frac{1}{\sqrt{2e}(n+1)}$$

- (c) Etudier la convergence de la suite $(J_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
2. (a) Etudier les variations de la suite $(I_n)_n$.
- (b) Montrer que pour tout n de \mathbb{N} :

$$I_n = \frac{1}{n+1} - \frac{2}{n+1} J_{n+1}$$

- (c) En déduire la limite de I_n et celle de $n \cdot I_n$ quand n tend vers $+\infty$. En déduire un équivalent de I_n lorsque n tend vers $+\infty$. Quelle est la nature de la série de terme général I_n ?

Exercice 2

L'objet de cet exercice est de résoudre, dans l'ensemble des matrices carrées de taille 2 l'équation

$$Z^2 = A \tag{1}$$

où Z est la matrice inconnue et A une matrice donnée de la forme $A = \begin{pmatrix} a & 1-a \\ 1-a & a \end{pmatrix}$ avec $0 < a < 1$.

1. Dans cette question, on suppose que $a = 5/8$ et donc $A = \begin{pmatrix} 5/8 & 3/8 \\ 3/8 & 5/8 \end{pmatrix}$

- (a) Soit $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer P^2 puis P^4 . En déduire que P est inversible et trouver sa matrice inverse.
- (b) Montrer que la matrice $D = P^{-1} \cdot A \cdot P$ est diagonale et la déterminer.

2. On se place désormais dans le cas général où $A = \begin{pmatrix} a & 1-a \\ 1-a & a \end{pmatrix}$ avec $0 < a < 1$.

Montrer que la matrice $D_a = P^{-1} \cdot A \cdot P$ (où P est la matrice précédente) est diagonale.

3. Soit $Y = P^{-1} \cdot Z \cdot P$.

- (a) Montrer que l'équation (1) équivaut à

$$Y^2 = D_a \tag{2}$$

- (b) On cherche à résoudre l'équation (2) en prenant Y sous la forme générale : $Y = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$

- i. Ecrire le système de quatre équations à quatre inconnues x, y, z et t qui est équivalent à l'équation (2)

- ii. Montrer qu'aucune solution de (2) ne vérifie $x + t = 0$.
- iii. Résoudre ce système et donner toutes les solutions de l'équation (2) (on discutera suivant la valeur de a , $0 < a < 1$).
- (c) En déduire le nombre de solutions de l'équation (1) suivant les valeurs de a .
- (d) Donner les solutions de l'équation dans le cas où $a = 5/8$.

Exercice 3

Dans cet exercice, on étudie des situations probabilistes liées à un jeu de dés à six faces. Pour ce jeu, effectuer une partie consiste à lancer successivement deux dés équilibrés.

On note :

- D_1 le résultat du premier dé et D_2 le résultat du deuxième dé
- E_1 l'événement : $(D_1 < D_2)$, E_2 l'événement : $(D_1 = D_2)$ et E_3 l'événement : $(D_1 > D_2)$

Lors d'une partie,

- si l'événement E_1 se produit alors le joueur ne marque pas de point,
- si l'événement E_2 se produit alors le joueur marque 2 points,
- si l'événement E_3 se produit alors le joueur marque 1 point.

I. Etude de parties successives. Soit n un entier naturel non nul. Le joueur joue successivement n parties.

Pour tout entier naturel $i \geq 1$, on note :

- X_i la variable aléatoire représentant le nombre de points marqués lors de la $i^{\text{ème}}$ partie ;
- Y_i le nombre total de points marqués au cours des i premières parties.

1. Calculer la probabilité de chacun des événements E_1 , E_2 et E_3 .
2. Soit $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, déterminer la loi de la variable aléatoire X_i puis calculer son espérance et sa variance.
3. Trouver la loi de la variable aléatoire Y_1 .
4. Quelle est la loi de la variable aléatoire Y_2 ?
5. (a) Préciser l'ensemble $Y_3(\Omega)$ des valeurs prises par la variable aléatoire Y_3 .
(b) Construire et remplir le tableau de la loi conjointe du couple (Y_2, Y_3) .
On justifiera précisément une valeur non nulle de ce tableau, les autres pouvant être données directement.
(c) En déduire la loi de la variable aléatoire Y_3 .
6. (a) Ecrire Y_n en fonction des variables aléatoires X_1, X_2, \dots, X_n .
En déduire l'espérance mathématique et la variance de Y_n .
(b) En moyenne, combien de parties au minimum doit faire le joueur pour obtenir plus de 10 points ?

II. Etude du temps d'attente. Le joueur joue maintenant jusqu'à ce qu'il dépasse un nombre de points donné.

Plus précisément on note : T_1 (respectivement T_2) la variable aléatoire représentant le nombre de parties effectuées par le joueur lorsque le total de ses points est supérieur ou égal à 1 (respectivement 2) pour la première fois (si cet événement se produit).

Par exemple si les points marqués par le joueur sont dans l'ordre :

Exemple 1 : 0 0 1 0 1 2 alors $T_1 = 3$ et $T_2 = 5$.

Exemple 2 : 0 0 0 2 1 2.... alors $T_1 = 4$ et $T_2 = 4$.

1. (a) Préciser l'ensemble $T_1(\Omega)$ des valeurs prises par la variable aléatoire T_1 puis, pour tout k appartenant à $T_1(\Omega)$, donner la valeur de la probabilité $P(T_1 = k)$.
(b) Donner la valeur de l'espérance et de la variance de la variable aléatoire T_1 .
2. (a) Déterminer l'ensemble $T_2(\Omega)$ des valeurs prises par la variable aléatoire T_2 .
(b) Calculer les probabilités $P(T_2 = 1)$ et $P(T_2 = 2)$.
(c) Prouver que, pour $k \geq 3$, on a :

$$P(T_2 = k) = \left(\frac{5}{12}\right)^{k-1} \times \frac{1}{6} + (k-1) \left(\frac{5}{12}\right)^{k-1} \times \frac{7}{12}$$

- (d) Ce résultat est-il valable pour $k = 1$ et $k = 2$?

(e) Etablir que : $\sum_{k=1}^{+\infty} P(T_2 = k) = 1$.

(f) Calculer $E(T_2)$.