Feuille d'exercices 0

Exercice 1 Ecrire sans factorielle et déterminer la limite de $\dfrac{(2n)!(n!)^2}{(n+2)!(n+1)!(2n+2)!}$ quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 2 Simplifier, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{n}\displaystyle\prod_{k=1}^{2n}\left(1+\frac{1}{k}\right)$ et déterminer sa limite quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 3 Ecrire, à l'aide de factorielles, $\displaystyle\prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{1}{2k}\right)$.

Exercice 4 Résoudre, pour $n \in \mathbb{N}$, $n! - 2(n+1)! + 3(n-1)! = 0$.

Exercice 5 Montrer, $\forall 1 \leq k \leq n$, $k\dbinom{n}{k} = n\dbinom{n-1}{k-1}$.

Exercice 6 Calculer et déterminer la limite de $\dfrac{\dbinom{n}{n-2}}{\dbinom{2n+1}{2n-1}}$ quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 7 Soient a et b deux réels strictement positifs, simplifier $\dfrac{(\sqrt{a})^{2n+1}\,b^n}{b^{n+2}a^{n-1}}$.

Exercice 8 Montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ définie par $u_n = \dfrac{\sqrt{2^{n+3}}+\sqrt{2^n+1}}{\sqrt{3^{n-1}}+\sqrt{3^{n+1}}}$ est une suite gémoétrique.

Exercice 9 Simplifier les expressions suivantes

$$A = \frac{\exp(x^2)}{e^{2x}} \qquad B = \exp(x^2+1) - (e^x)^2 \qquad C = e^{3x} - e^{2x} - (e^x+1)(e^{2x}-1)$$
$$D = \frac{\ln 2x}{\ln x} \qquad E = (\ln x)^2 - \ln(x^2) \qquad F = \left[\exp\left(\frac{1}{2}\ln\left(x^2\right)\right)\right]^2$$

Exercice 10 Soit $(a,b,c) \in (\mathbb{N}^*)^3$. Mettre sous la forme $\dfrac{\alpha}{\beta}$ puis sous la forme $1+\dfrac{\gamma}{\delta}$ avec $(\alpha,\beta,\gamma,\delta) \in \mathbb{N}^4$, le quotient $\dfrac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$.

Exercice 11 Résoudre l'équation d'inconnue le réel x suivante : $\dfrac{1}{\frac{1}{x+1}-\frac{x}{(x-1)^2}} = 0$.

Exercice 12 Résoudre l'inéquation suivante $\sqrt{x+1} - x \geq 0$.

Exercice 13 Soient a et b deux réels et n un entier naturel. Simplifier $(a-b)\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a^k b^{n-k}$. En déduire une factorisation de $a^4 - b^4$.