

FEUILLE D'EXERCICES 1

SUITES RÉELLES

Exercice 1 Etudier la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = 3 - \frac{u_n}{2}$.

Exercice 2 Soit $(u_n)_n$ la suite définie par $u_0 = e$, $u_1 = e^{-6}$ et pour tout entier naturel n ,

$$u_{n+2} = \sqrt[4]{u_{n+1}u_n^3}.$$

1. Montrer que pour tout entier naturel n , u_n existe et est strictement positif.
2. Pour tout entier naturel n , on pose $v_n = \ln u_n$.
 - (a) Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_{n+2} = \frac{1}{4}v_{n+1} + \frac{3}{4}v_n$$
 - (b) Calculer v_n en fonction de n .
3. Déterminer l'expression de u_n en fonction de n . Montrer que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

Exercice 3

1. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Montrer que

$$\frac{1}{k+1} \leq \ln(k+1) - \ln(k) \leq \frac{1}{k}$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose

$$u_n = \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \right) - \ln(n) \quad \text{et} \quad v_n = \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \right) - \ln(n+1)$$

- (a) Montrer que les suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ sont adjacentes et convergent vers un nombre réel γ (appelé constante d'Euler).
- (b) Ecrire un programme en TP qui permet d'obtenir un encadrement de γ d'amplitude inférieure à 10^{-6} .

Exercice 4 Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = e^{\frac{x-1}{2}}$.

1. Etablir le tableau de variations de f .
2. Montrer que f admet exactement deux points fixes α et β (avec $\alpha < \beta$). Etudier le signe de $f(x) - x$ sur \mathbb{R} .
3. Soit $(u_n)_n$ la suite définie par

$$u_0 \in \mathbb{R} \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = e^{\frac{u_n-1}{2}}$$

Etudier cette suite selon les valeurs de u_0 .

4. Ecrire un programme en TP qui calcule u_n pour u_0 et n entrés au clavier.

Exercice 5

1. Montrer que l'équation

$$2 - x - 2e^{-x} = 0$$

admet deux solutions réelles : 0 et $\alpha > 0$.

2. On considère la suite $(u_n)_n$ définie par

$$u_0 = 1 \text{ et } \forall n \geq 0, \quad u_{n+1} = 2(1 - e^{-u_n})$$

- (a) Etudier les variations de f définie par $f(x) = 2(1 - e^{-x})$.
- (b) Montrer que si $(u_n)_n$ converge, alors elle converge vers α .
- (c) Vérifier que l'on a $1 < \alpha < 2$.
- (d) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{2}{e} |u_n - \alpha|$$

- (e) En déduire que la suite $(u_n)_n$ converge vers α .
- (f) A l'aide du Turbo-Pascal, déterminer un entier n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$, u_n soit une approximation de α à 10^{-6} près.

Exercice 6

Pour tout entier naturel n non nul, on note f_n la fonction définie par : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $f_n(x) = x - n \cdot \ln(x)$.

1. (a) Etudier cette fonction et dresser son tableau de variations.
- (b) En déduire, lorsque n est supérieur ou égal à 3, l'existence de deux réels u_n et v_n solutions de l'équation $f_n(x) = 0$ et tels que $0 < u_n < n < v_n$.
2. Etude de la suite $(u_n)_{n \geq 3}$.
 - (a) Montrer que $\forall n \geq 3, 1 < u_n < e$.
 - (b) Montrer que $f_n(u_{n+1}) = \ln(u_{n+1})$, puis en conclure que (u_n) est décroissante.
 - (c) En déduire que $(u_n)_{n \geq 3}$ converge et montrer, en encadrant $\ln(u_n)$, que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$.
 - (d) Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(u_n)}{u_n - 1} = 1$; en déduire que $u_n - 1 \sim \frac{1}{n}$.
3. Etude de la suite $(v_n)_{n \geq 3}$
 - (a) Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$.
 - (b) Calculer $f_n(n \cdot \ln(n))$ puis montrer que $\forall n \geq 3, n \cdot \ln(n) < v_n$.
 - (c) Soit g la fonction définie par : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $g(x) = x - 2 \ln(x)$.
Etudier g et donner son signe. En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}^*, n > 2 \ln(n)$.
 - (d) En déduire le signe de $f_n(2n \cdot \ln(n))$, puis établir que : $n \ln(n) < v_n < 2n \cdot \ln(n)$
 - (e) Montrer que $\ln(v_n) \sim \ln(n)$.