Travaux dirigés n°1
Dénombrement

Exercice 1 (Quelques "découpages"" d'un ensemble fini) Soit E un ensemble de cardinal n.

1. Combien de couples (A, B) de parties de E vérifient $A \cap B = \emptyset$ et $A \cup B = E$?
2. Combien de couples (A, B) de parties de E vérifient $A \cup B = E$?
3. Combien de couples (A, B) de parties de E vérifient $A \subset B$?

Exercice 2 (Les chemins croissants) On se déplace dans un plan rapporté à un repère orthonormé en respectant les règles suivantes :

– le départ s'éffectue à l'origine du repère, c'est-à-dire au point de coordonnées $(0, 0)$,
– Si, à un certain instant, on est au point de coordonnées (x, y) alors, à l'instant suivant, on peut se situer soit au point de coordonnées $(x + 1, y)$ (on dit qu'on a effectué un pas horizontal) soit au point de coordonnées $(x, y + 1)$ (on dit alors que l'on a effectué un pas vertical).

Un tel déplacement est appelé *chemin croissant*.

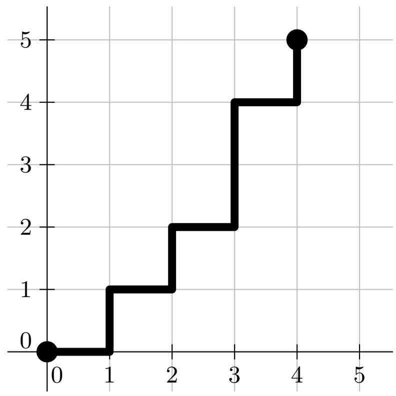

Figure 1 – Exemple de chemin croissant joignant $(0, 0)$ au point $(4, 5)$

1. Pour $(p, q) \in \mathbf{N}^2$, combien existe-t-il de chemins croissants joignant l'origine au point M de coordonnées (p, q) ?
2. A partir de maintenant, on considère deux entiers naturels p et q vérifiant $1 \leq q < p$. Le point $M(p, q)$ est donc situé sous la première bissectrice.
   (a) Notons E_v l'ensemble de tous les chemins croissants joignant l'origine au point (p, q) et qui commencent par un pas vertical. Déterminer card(E_v).
   (b) Soit E_h l'ensemble des chemins croissants joignant l'origine au point (p, q), qui commencent par un pas horizontal et qui recoupent la première bissectrice. Montrer qu'il existe une bijection "naturelle" de E_v sur E_h.
   (c) En déduire le nombre de chemins croissants joignant l'origine au point de coordonnées (p, q) qui commencent par un pas horizontal et qui ne retouchent jamais la première bissectrice du repère après avoir quitté l'origine.

Exercice 3 (Application de la formule de Poincaré) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère n lettres $L_1, \ldots, L_n$ destinées respectivement aux personnes $P_1, \ldots, P_n$ et n enveloppes $E_1, \ldots, E_n$ adressées aux personnes $P_1, \ldots, P_n$. On range chaque lettre dans une et une seule enveloppe.

1. Combien y-a-t-il de façons de ranger les n lettres dans les n enveloppes ?
2. On souhaite calculer le nombre de façons de ranger les n lettres dans les n enveloppes de telle sorte qu'au moins une lettre arrive à son destinataire.

Pour cela on adpote kes notations suivantes :
On note A_n l'ensemble des façons de ranger les n lettres dans les n enveloppes de telle sorte qu'au moins une lettre arrive à son destinataire.
De plus, pour $i \in [\![1, n]\!]$, on note B_i l'ensemble des façons de ranger les n lettres dans les n enveloppes de telle sorte que la lettre L_i arrive à son destinataire P_i.

(a) Exprimer A_n en fonction des $B_k, 1 \leq k \leq n$.

(b) Soit $k \in [\![1, n]\!]$ et $i_1 < i_2 < \ldots < i_k$ des éléments de $[\![1, n]\!]$. Montrer

$$card\left(\bigcap_{j=1}^{k} B_{i_j}\right) = (n-k)!$$

(c) A l'aide de la formule de Poincaré et des questions précédentes, montrer

$$card(A_n) = -n! \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$$