Concours de l'ESM de Saint-Cyr en 2003
Concours « Sciences Economiques et Sociales »

Epreuve de Mathématiques

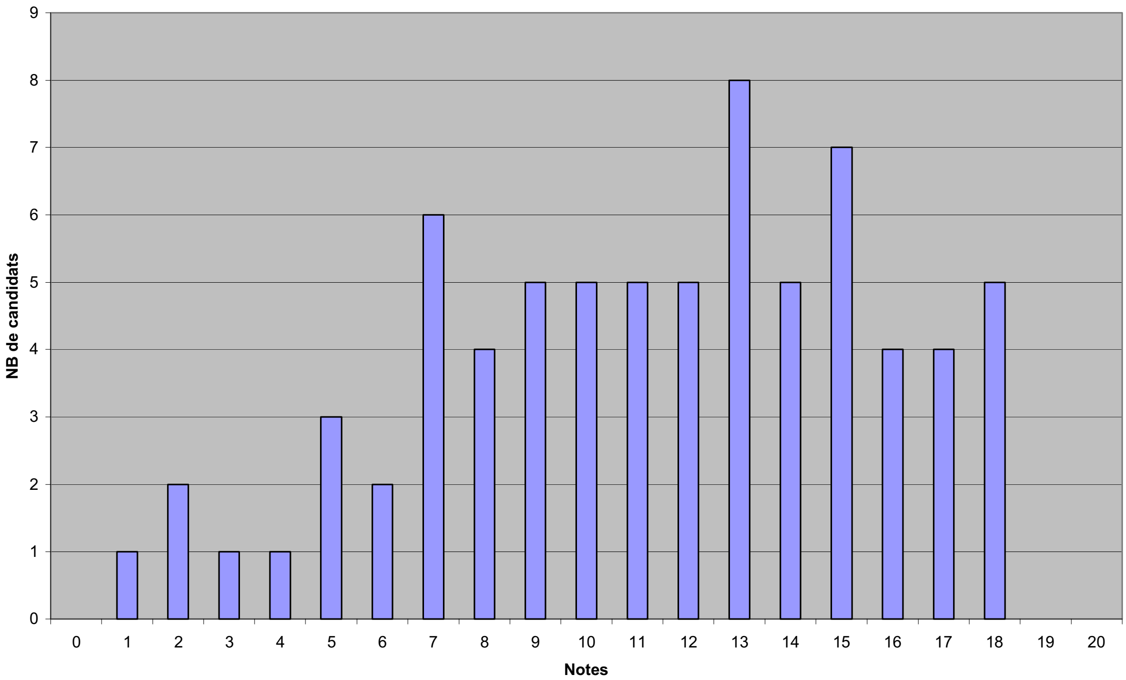
<u>Examinatrice :</u> **Madame COUAIRON Geneviève**

Répartition des notes

<u>73 candidats interrogés :</u>

Note	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Nb candidats	0	1	2	1	1	3	2	6	4	5	5	5	5	8	5	7	4	4	5	0	0

Moyenne	11,288



<u>Nature et déroulement de l'épreuve :</u>

Le candidat prépare un exercice pendant 30 minutes puis fait un exposé de 25 minutes au tableau.
Les questions portent soit sur un thème d'analyse-probabilités, soit sur un thème d'algèbre-probabilités ; les sujets couvrent l'ensemble du programme des deux années des classes préparatoires.

<u>Commentaires généraux et conseils aux candidats :</u>

Dans l'ensemble les candidats sont rompus aux exercices classiques. Rappelons qu'il n'est pas demandé de tout écrire au tableau encore moins de recopier le texte de l'exercice. Il est essentiel de bien gérer son temps pour aborder les questions délicates et sélectives. Il est aussi conseillé de renoncer à la tentation du bluff.

Un peu de bon sens ou d'esprit critique permet d'éviter certaines erreurs élémentaires : (probabilités négatives, deux vecteurs propres pour une seule valeur propre simple, sous espaces propres nuls…etc.…).

Rappelons aussi qu'un théorème comporte des hypothèses et des conclusions et qu'une démonstration utilisant ce théorème doit en vérifier les hypothèses avant d'en utiliser les conclusions.

Nous attendons un exposé clair, soigné, argumenté.

Le raisonnement probabiliste est un élément important du programme, il faut lui accorder l'investissement nécessaire et structurer son apprentissage.

Pour rentrer dans le détail des erreurs et lacunes fréquemment rencontrées :

<u>En probabilités</u> :

- Confusion entre un événement et sa probabilité ; entre probabilité conditionnelle et probabilité d'événements composés.
- Les notions de lois marginales, de variance d'une somme sont souvent ignorées.

<u>En algèbre</u> :

- Les difficultés dans la conduite de calculs algébriques simples sont trop fréquentes (étude du signe d'une dérivée, résolution d'un système linéaire).
- La pratique et les connaissances de base de la diagonalisation sont mal assimilées.
- Le binôme de Newton n'a pas beaucoup de succès.

<u>En analyse</u> :

- l'étude d'un trinôme du second degré, la résolution d'une équation simple ne devraient pas poser problème.
- La définition de la dérivabilité en un point, les développements limités et les théorèmes sur les croissances comparées devraient être connus.
- Les exercices sur les séries et les convergences d'intégrales sont les plus maltraités.

Cette session s'est déroulée dans d'excellentes conditions. Nous soulignerons l'extrême courtoisie des candidats.

Exercices proposés

Pb.alg.1.

Soit E l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à 2 et φ l'application définie par :

$\forall P \in E, \varphi(P) = Q$ tel que $\forall x \in R, Q(x) = \frac{1}{2}(P(x+1) + P(x))$.

1) Montrer que φ est un endomorphisme de E. Donner la matrice M de φ dans la base canonique de E

2) Etudier la diagonalisation de M.

3) I étant la matrice unité d'ordre 3, calculer $(M-I)^2$ et $(M-I)^3$ où I est la matrice unité 3-3. En déduire l'expression de M^n en fonction de l'entier naturel n.

4) M est-elle inversible ?

Pb alg 45.

On considère la matrice A définie par : $A = \begin{pmatrix} 8 & -1 & -5 \\ -2 & 3 & 1 \\ 4 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

On admet que l'on a : $A^3 - 10A^2 + 32A - 32I_3 = (0)$, où I_3 est la matrice unité d'ordre 3 et (0) représente la matrice nulle.

1. Montrer que si λ est une valeur propre de A alors $\lambda^3 - 10\lambda^2 + 32\lambda - 32 = 0$. Quelles sont les valeurs propres éventuelles de A?

2. Montrer que les valeurs précédentes sont valeurs propres de A et déterminer la dimension des sous-espaces propres correspondants.

3. La matrice A est-elle diagonalisable?

4. La matrice A est-elle inversible ?

5. On considère les vecteurs $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$ définis par $\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{u}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

a) Montrer que B' = $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$ forment une base de $\mathbf{R}^3$.

b) Que peut-on dire de $f(\vec{u}_1)$? de $f(\vec{u}_2)$? Déterminer $f(\vec{u}_3)$ et exprimer $f(\vec{u}_3)$ dans la base B'.

c) Donner la matrice **T** de f dans la base $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$. Que peut-on dire de **T** ?

6.

a) Montrer qu'il existe des suites $(x_n), (y_n), (z_n)$, $n \in \mathbf{N}^*$., telles que :

$$f^n\left(\vec{u_3}\right) = x_n \vec{u_1} + y_n \vec{u_2} + z_n \vec{u_3}.$$

b) Démontrer que (z_n) est une suite géométrique de raison 4.

c) En déduire que $(x_n), (y_n)$, sont des suites linéaires doublement récurrentes que l'on étudiera.

d) Déterminer alors, $\mathbf{T}^n$ pour $n \in \mathbf{N}^*$..

e) Donner la manière de déterminer A^n pour $n \in \mathbf{N}^*$.

Pba.37

1. Calculer $\int_0^1 x.\mathbf{ln}(x+1)dx$
2. Montrer que si x est un réel positif ou nul, alors $|\mathbf{ln}(x+1) - x| \leq x^2$.
3. Soit $n \geq 2$. On pose

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2} \mathbf{ln}\left(1 + \frac{k}{n}\right) \quad et \quad v_n = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{ln}\left(1 + \frac{k}{n}\right) \mathbf{ln}\left(1 + \frac{k}{n^2}\right)$$

Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} (u_n - v_n)$. On rappelle que $|a+b| \leq |a| + |b|$

4. En déduire que la suite (v_n) converge et déterminer sa limite.

Pbvd.16.

Soit X une variable aléatoire dont la densité de probabilité f vérifie :

$$f(t) = \begin{cases} t+1 & \text{si } |t| < k \\ 0 & \text{si } |t| > k \end{cases}$$

1. Déterminer la constante k.
2. Déterminer la fonction de répartition F de X.
3. Soit la variable aléatoire $T = 1 + X^2$.
   Déterminer la densité de probabilité g de T et calculer E(T) et σ(T).

Pbvd.44N

Soit X une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite N(0,1), et Y la variable $\sigma X+m$, où σ est un réel strictement positif et m un réel quelconque.

1. Rappeler les fonctions f et g, densités respectives de X et Y.
2. Donner les espérances E(X), $E(X^2)$.
   Calculer les espérances $E(X^3)$ et $E(X^4)$.
   Etablir une relation de récurrence entre les espérances $E(X^n)$ et $E(X^{n-2})$. En déduire $E(X^n)$ pour tout entier naturel n non nul.(On pensera à justifier l'existence des espérances demandées.
3. Pour tout entier naturel n non nul, calculer l'espérance $E(Y^n)$ en fonction de n, σ et m.
   Traiter le cas particulier n=4.

Pbvd.4.

1. Soit a un réel non nul. On considère la suite (u_n), définie par :

$$\forall n \in \mathrm{N}, \quad u_n = \frac{1}{8}\left(\frac{2+a^n}{n!}\right)$$

   Pour quelle valeur du réel a, la suite (u_n) définit-elle bien une loi de probabilité ?
2. Dorénavant la valeur de a est celle déterminée dans la question précédente. Soit X et Y deux variables aléatoires, à valeurs dans N et indépendantes et telles que :

$$\forall n \in \mathrm{N}, \quad p(X=n) = p(Y=n) = \frac{1}{8}\left(\frac{2+a^n}{n!}\right)$$

   Calculer l'espérance de X.
3. Déterminer la loi de $X+Y$.

Pbvd.28.

On rappelle la formule de Vandermonde $\sum_{k=0}^{n}(C_n^k)^2 = C_{2n}^n$

On lance 2n fois $(n \geq 1)$ une pièce de monnaie équilibrée.

1. Soit la variable aléatoire *X*(resp *Y*) égale au nombre de « pile » obtenus aux rangs pairs (resp nombre de « face » obtenus aux rangs impairs).

   a) Déterminer la loi de *X*.

   b) Déterminer la probabilité de l'événement ($X = k \cap Y = k$) , *k* est un entier naturel.

   c) En déduire la probabilité de l'événement *X*=*Y*

2. Soit p_n la probabilité d'obtenir autant de piles aux rangs pairs que de faces aux rangs impairs.

   Montrer que $p_n = \dfrac{C_{2n}^n}{2^{2n}}$

3. Montrer par récurrence que $p_n = \prod_{k=1}^{n}\left(1-\dfrac{1}{2k}\right)$

4.
   a) Montrer que la série de terme général $\ln\left(1-\dfrac{1}{2n}\right)$ est divergente ; en déduire que $\lim_{n\to+\infty} \ln(p_n) = -\infty$

   b) Déterminer la limite de p_n

5. Montrer par récurrence que $\forall n \in N^{\bullet}$, $\dfrac{2^{2n-1}}{n} \leq C_{2n}^n$

6. En déduire que la série de terme général p_n est divergente

Pba.12.

Soit x un réel strictement positif et n un entier naturel non nul.

1. Etudier la convergence de l'intégrale

$$I_n(x) = \int_{-\ln(x)}^{+\infty} e^{-nt}\,dt$$

2. Etudier suivant les valeurs de x, la convergence de la série de terme général $I_n(x)$

3. On pose $J_n(x) = \displaystyle\int_{-\ln(x)}^{+\infty} \frac{1-e^{-nt}}{1-e^{-t}} e^{-t}\,dt$

   a) Justifier la convergence de l'intégrale $J_n(x)$ (on distinguera les cas 0<x<1 et x>1).

   b) Montrer que $\sum_{k=1}^{n}\dfrac{x^k}{k} = J_n(x)$

4.
   On suppose ici que 0<x<1.

a. Etudier la fonction g définie sur $\left[-\ln(x),+\infty\right[$ par :

$$g(t)=\frac{e^{-t}}{1-e^{-t}}$$

b. Calculer $\int_{-\ln(x)}^{+\infty}\frac{e^{-t}}{1-e^{-t}}dt$ et en déduire la valeur de $\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{x^k}{k}$