

Remarques :

Sur 78 candidats interrogés, la moyenne des notes est de 10,08 : même si la moyenne est plus faible que celle de l'an passé (11,3), on peut noter que 50 % des candidats sont d'un bon niveau. Six d'entre eux se sont révélés excellents.

Rappelons qu'il s'agit d'une épreuve orale ; il n'est pas demandé de tout écrire au tableau ou de recopier le texte de l'exercice.

Tout candidat ralentissant sa présentation en détaillant exagérément des points mineurs doit s'attendre à une note très moyenne. Les exposés dynamiques où les questions faciles traitées avec une certaine rapidité sont gratifiés.

Il n'est pas nécessaire de traiter la totalité de l'exercice pour obtenir une très bonne note.

Erreurs fréquemment rencontrées :

En probabilités :

- a) Confusion entre un événement et sa probabilité ; entre probabilité conditionnelle et probabilité d'événements composés.
- b) Les notions de lois marginales, de variance d'une somme sont souvent ignorées.
- c) La fonction de répartition n'est jamais correctement définie.

En algèbre :

- a) Trop souvent les candidats se précipitent sur des calculs laborieux qu'ils pourraient éviter en enchaînant les questions.
- b) Confusion entre le cardinal d'une famille et la dimension d'un sous-espace vectoriel.
- c) Le lien entre matrice et endomorphisme n'est pas maîtrisé.

En analyse :

- a) Beaucoup de difficultés dans le travail sur les inégalités.
- b) Les notions de continuité et de dérivabilité posent toujours des problèmes.
- c) Les équivalents sont rarement obtenus ou confondus avec des limites.
- d) Le petit o de x disparaît dans les développements limités.
- e) La méthode des rectangles pour obtenir des encadrements dans le cas de fonctions monotones et continues est souvent méconnue.
- f) Les exercices sur les séries et les convergences d'intégrales sont toujours les plus mal résolus.
- g) **La grande majorité des candidats ne connaît pas les règles sur les puissances.**

Conclusion :

Comme les années précédentes, cette session s'est déroulée dans de bonnes conditions. Encourageons les candidats à privilégier la réflexion à l'application de « recettes » toutes prêtes. C'est l'aptitude à utiliser des connaissances qui est valorisée et non la capacité à « bachoter ».

Pb 401 :

Soit $k \in \mathbf{N}^*$ fixé.

1) Pour $n \in \mathbf{N}$, on pose $I_n = (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{x^{k(n+1)}}{1+x^k} dx$.

Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$.

2) On pose $J = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^k}$. Calculer $J - I_n$.

3) En déduire la nature de la série $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{kn+1}$.

4) En utilisant une intégration par parties, déterminer un équivalent de I_n pour n au voisinage de l'infini.

Pb 402 :

1) Montrer que l'intégrale : $I = \int_0^{+\infty} \frac{\ln^2(t)}{1+t^2} dt$ est convergente.

Comparer sa valeur avec celle de : $J = \int_0^1 \frac{\ln^2(t)}{1+t^2} dt$

2) Calculer pour $n \in \mathbf{N}$: $u_n = \int_0^1 t^{2n} \ln^2(t) dt$.

3) Montrer que pour tout $t \in [0,1]$:

$$\frac{1}{1+t^2} = 1 - t^2 + t^4 - \dots + (-1)^n t^{2n} + \frac{(-1)^{n+1} t^{2n+2}}{1+t^2}$$

4) Montrer que la série de terme général $\frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}$ est convergente.

Exprimer sa somme $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}$ en fonction de I .

Pb 403 :

Pour $x > 0$, on pose : $f(x) = \int_0^1 \frac{t^x}{1+t} dt$

1) Vérifier que, pour tout $x > 0$, $f(x) + f(x+1) = \frac{1}{x+1}$.

2) Donner le sens de variation de f .

3-a) Trouver la limite de f lorsque x tend vers $+\infty$.

3-b) Donner un équivalent simple de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

Pb 404 :

1). Etudier l'application f définie sur \mathbf{R}^* , par :

$$f : x \mapsto \frac{x}{e^x - 1}$$

2). Justifier la phrase suivante : « f admet un prolongement par continuité, qui réalise une bijection entre \mathbf{R} et $]0, +\infty[$ ».

On note g la bijection réciproque. Tracer la représentation graphique de g dans le repère qui a servi à tracer celle de f .

3). Calculer l'abscisse a du point d'intersection des représentations graphiques de f et g .

4). Dans le repère précédent, on considère, le domaine D délimité par les trois arcs C_1, C_2, C_3 suivants :

$$\begin{cases} C_1 & \text{d'équation } y = -x \\ C_2 & \text{d'équation } y = f(x) \text{ et } x \in]-\infty, a[\\ C_3 & \text{d'équation } y = g(x) \text{ et } x \in]a, +\infty[\end{cases}$$

Démontrer que son aire est bornée.

Pb 405 :

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 1. Une urne contient $2n$ boules, dont n sont blanches et les n autres rouges. On tire au hasard, une à une et sans remise, toutes les boules de l'urne. A chaque tirage, si la boule tirée est de couleur différente de celle obtenue au tirage précédent (s'il y en a un) on gagne un Euro. On note G le gain total en Euros obtenu à l'issue des $2n$ tirages.

1. Déterminer les probabilités des événements : $[G = 0], [G = 1], [G = 2]$.

Pour $k > 0$, on note X_k la variable aléatoire prenant la valeur 1 si on gagne un Euro au k -ème tirage, et prenant la valeur 0 sinon.

a) Déterminer la loi de X_k , son espérance et sa variance (on précisera le cas du premier tirage).

b) Exprimer G en fonction des X_k , pour $1 \leq k \leq 2n$. En déduire l'espérance de G .

c) Déterminer la loi du couple (X_k, X_l) pour tout couple (k, l) tel que l'on ait $1 \leq k < l \leq 2n$. (On distinguera le cas $l = k + 1$ du cas général).

Pb-406 :

Soit l un réel strictement positif. Soit X une variable aléatoire de loi uniforme sur $(0, l)$.

On pose :

$$A = \min(X, l - X) \text{ et } B = \max(X, l - X).$$

1. Quelle est la loi de la variable $A+B$?

Déterminer la loi de A , puis celle de B . Calculer l'espérance et la variance des variables A et B . Quelle est la loi de la variable aléatoire $B-A$?

a) Calculer, pour tout réel t , le nombre $F(t) = P(A \leq t * B)$.

Vérifier que F est une fonction de répartition. On notera Y une variable aléatoire de fonction de répartition F .

b) Déterminer une densité de la variable aléatoire Y .

c) Déterminer cinq réels a, b, c, d et e tels que l'on ait pour tout réel $x \neq -1$:

$$\frac{x}{(1+x)^2} = \frac{a}{1+x} + \frac{b}{(1+x)^2}$$

$$\frac{x^2}{(1+x)^2} = c + \frac{d}{1+x} + \frac{e}{(1+x)^2}$$

d) Calculer l'espérance et la variance de Y .

2. On considère la variable aléatoire $Z = AB$.

a) Soit t un réel fixé. Déterminer l'ensemble des réels x solution de l'inéquation :

$$x^2 - tx + t > 0$$

b) En déduire la fonction de répartition de Z . Calculer l'espérance de Z en faisant une intégration par parties.

Pb 407 :

X est une variable aléatoire qui suit la loi normale centrée réduite et Y est une variable discrète qui suit la loi uniforme sur $\{-1,1\}$, X et Y étant supposées indépendantes.

- 1) Déterminer la loi de la variable aléatoire $Z=XY$.
- 2) Déterminer une densité g de X^2 .
- 3) On pose $T = XZ = YX^2$
 - a) Exprimer une densité de T , en fonction de g .
 - b) Montrer que T admet une espérance, préciser alors sa valeur.
 - c) Que vaut $E(XZ) - E(X)E(Z)$?

Pb 408 :

Soit $a \neq b$ appartenant à $]0,1[$. On pose :

$$M = \begin{pmatrix} \frac{1+a}{2} & \frac{1-b}{2} \\ \frac{1-a}{2} & \frac{1+b}{2} \end{pmatrix}$$

Soit $f \in L(\mathfrak{R}^2)$ dont la matrice relativement à la base canonique est M .

- 1) Déterminer les vecteurs de \mathfrak{R}^2 invariants par f .
- 2) Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de f . Calculer M^n pour

$$a = \frac{1}{3} \quad \text{et} \quad b = \frac{2}{3}$$

Un pêcheur pose ses nasses en 2 endroits distincts d'un fleuve : l'une est immergée près d'une île, l'autre est en bord de rive.

Chaque jour, à midi, il essaie de relever ses nasses : il effectue donc une tentative par jour, mais compte tenu des courants, il n'est pas sûr d'aboutir (auquel cas, il rebrousse chemin).

Il a une chance sur 6 de pouvoir quitter l'île pour atteindre la rive et une chance sur 3 de pouvoir quitter la rive pour aller sur l'île. On désigne par R_n et I_n les événements : le pêcheur est sur la rive (resp sur l'île) après n tentatives.

- 3) Sachant que le 1^{er} juillet 2004 au matin le pêcheur est sur l'île, quelle est la probabilité qu'il soit sur l'île,
 - a) le 3 juillet 2004 au soir ?
 - b) le 4 juillet 2004 au soir ?
 - c) le 20 août 2004 au soir ?

Pb 409 :

On considère la matrice $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ x^2 & 0 \end{pmatrix}$, où $x \in \mathbb{R}$.

- 1) Calculer M^n , pour tout n entier positif.
- 2) On suppose $x \neq 0$, montrer que M est inversible et déterminer M^{-n} , pour $n \geq 1$.
- 3) On considère la matrice A_n définie par :

$$A_n = I + \frac{M}{1!} + \frac{M^2}{2!} + \dots + \frac{M^n}{n!}, \text{ où } n \geq 1.$$

On pose $A_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix}$. Calculer a_n, b_n, c_n, d_n .

- 4) Montrer que ces quatre suites ont des limites notées respectivement a, b, c, d .
- 5) Soit A la matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Montrer que A est inversible pour toute valeur de x et calculer A^{-1} .

Pb 410 :

Dans l'ensemble $M_2(\mathbb{R})$ des matrices carrées réelles d'ordre 2, on considère les matrices :

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad M = aI + bJ, \text{ où } a \text{ et } b \text{ sont deux réels.}$$

1. Montrer que, pour tout entier n strictement positif, on a :

$$M^n = a^n I + n a^{n-1} b J$$

2. Pour tout entier n strictement positif, on considère la matrice :

$$S_n = I + \sum_{p=1}^n \frac{1}{p!} M^p$$

Montrer qu'il existe deux suites (u_n) et (v_n) telles que $S_n = u_n I + v_n J$

Déterminer la limite des suites (u_n) et (v_n) quand n tend vers l'infini.

3. On considère la matrice $S = e^a I + e^{ab} J$. Calculer les valeurs propres et les sous espaces propres associés de S et comparer ces éléments avec les éléments correspondants de la matrice M .

Pb 411 :

Soit E l'espace vectoriel des fonctions polynômes réelles sur \mathbb{R}^{+*} , de degré inférieur ou égal à 4, fonction nulle comprise. On considère l'application φ qui à toute fonction P de E associe la fonction $\varphi(P)$ définie sur \mathbb{R}^{+*} par :

$$\varphi(P)(x) = P(x) + 2x^4 P\left(\frac{1}{x}\right).$$

1. Montrer que φ est un endomorphisme de E .
2. Exprimer $\varphi^2 = \varphi \circ \varphi$ en fonction de φ et de l'identité. En déduire une relation vérifiée par les valeurs propres de φ .
3. Déterminer les éléments propres de φ .
4. l'endomorphisme φ est-il diagonalisable ?
5. Montrer que φ est inversible et déterminer son inverse.

Pb 412 :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $\mathfrak{R}_n[x]$ l'espace vectoriel des fonctions polynômes de degré inférieur ou égal à n , fonction nulle comprise. On note E le sous-espace de $\mathfrak{R}_n[x]$ formé des fonctions nulles en 0.

1. Pour $k \in \{1, \dots, n\}$, on pose : $e_k : x \rightarrow x^k$. Vérifier que $B = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ est une base de E .
2. Soit Q un élément fixé de E . Pour tout élément P de E , on note $T(P)$ la fonction polynôme définie par : $T(P)(x)$ est obtenu en ne gardant que les termes de degré inférieur ou égal à n de $(P \circ Q)(x)$.

On définit alors T par : $T : P \mapsto T(P)$

- a) Montrer que T est un endomorphisme de E .
- b) Dans cette question, $n=3$ et $Q : x \mapsto a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$.

Déterminer la matrice de T relativement à la base (e_1, e_2, e_3) de E . Quelles sont les valeurs propres de T ? Quand T est-il diagonalisable ?

- c) Dans cette question, $n=3$ et $Q : x \mapsto -x + x^2$, T est-il diagonalisable ?
- d) On revient au cas général. Quelle est la forme de la matrice de T relativement à la base B ? En déduire les valeurs propres de T .