

Feuille d'exercices numéro 4

PC

3.10.2007

Exercice 1 Déterminer la vitesse quadratique moyenne des atomes d'Hélium considéré comme un gaz parfait à $T = 300\text{K}$.

Exercice 2 Un verre rempli d'eau est posé sur un plateau tournant horizontal à la vitesse angulaire ω .

1. Pourquoi l'eau finira-t-elle progressivement par tourner à la même vitesse angulaire que le verre? Décrire brièvement les états intermédiaires.
2. On admet que la surface libre du liquide est une surface d'égale énergie potentielle (en tenant compte de l'énergie potentielle de pesanteur et de l'énergie potentielle d'inertie d'entraînement axifuge). Déterminer l'équation ($z = \varphi(r)$) de la surface.
3. Comment la forme de la surface peut-elle évoluer si ω devient très rapide?

Exercice 3 Une bille ($m = 0,900\text{g}$, $r = 3,00\text{mm}$) est lâchée sans vitesse initiale dans une colonne de glycérol ($\mu = 1260\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$, $\eta = 1,60\text{P}\ell$). Après un bref régime transitoire, la bille atteint une vitesse limite $v_{lim} = 82,0\text{mm} \cdot \text{s}^{-1}$.

1. On modélise les frottements fluides par une force du type $\vec{f} = -\alpha \vec{v}$. Justifier.
2. Déterminer la loi d'évolution de la vitesse v de la bille, tracer son allure.
3. En déduire la valeur numérique de α et comparer à l'expression théorique.
4. Calculer la durée caractéristique du régime transitoire.

Exercice 4 Une bille ($m = 0,900\text{g}$, $r = 3,00\text{mm}$) est lâchée sans vitesse initiale dans une colonne d'eau ($\mu = 1000\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$, $\eta = 1,0 \cdot 10^{-3}\text{P}\ell$). Après un bref régime transitoire, la bille atteint une vitesse limite $v_{lim} = 74,0\text{cm} \cdot \text{s}^{-1}$.

1. On modélise les frottements fluides par une force du type $\vec{f} = -\beta v \vec{v}$. Justifier.
2. Déterminer la loi d'évolution de la vitesse v de la bille, tracer son allure.
3. En déduire la valeur numérique de α et comparer à l'expression théorique.

Exercice 5 Décrire

- un écoulement incompressible d'un fluide compressible;
- un écoulement incompressible non stationnaire;
- un écoulement stationnaire non incompressible.

Exercice 6 Dans une canalisation cylindrique rectiligne, d'axe (O, z) , de rayon R , un fluide de masse volumique μ circule avec un champ de vitesses $\vec{v}(M, t)$. On note D_m le débit massique.

1. Déterminer le champ des vitesses pour un fluide incompressible, un débit massique constant et un champ des vitesses uniforme. Préciser la ou les catégories auxquelles appartient cet écoulement.
2. Déterminer le champ des vitesses, sa dérivée particulaire (en précisant l'accélération convective et l'accélération locale) pour un fluide incompressible, un débit massique augmentant lentement (avec un temps caractéristique τ négligeable devant celui de la traversée de la canalisation par le fluide) selon la loi $D_m = D_0 \left(1 + \frac{t}{\tau}\right)$ et un champ des vitesses uniforme. Préciser la ou les catégories auxquelles appartient cet écoulement.
3. Le fluide est maintenant un gaz parfait de masse molaire M à la température uniforme et constante T et le champ des pressions est $P(z) = P_0 \left(2 - \frac{z}{L}\right)$. On suppose que le champ des vitesses et des masses volumiques est uniforme sur toute section droite de la canalisation.

Exercice 7 Le champ des vitesses d'un fluide dans une canalisation cylindrique droite de rayon R est $\vec{v} = v_0 \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) \vec{u}_z$. Déterminer le débit volumique. Déterminer la vitesse moyenne débitante (c'est-à-dire celle qu'aurait un fluide de même débit avec une vitesse uniforme dans toute section) et la vitesse moyenne mesurée le long d'un rayon (ou d'un diamètre) de la section.

Exercice 8 Un récipient cylindrique fermé de rayon R est plein d'eau, et placé sur un plateau tournant à la vitesse angulaire ω . Déterminer, dans le référentiel du laboratoire, le champ des vitesses, sa dérivée particulaire (en précisant l'accélération convective et l'accélération locale). Préciser la ou les catégories auxquelles appartient cet écoulement.

Exercice 9 Dans les trois situations suivantes, tracer la cartographie du champ de vitesses, calculer la dérivée particulaire de la vitesse en précisant l'accélération convective et l'accélération locale et préciser la ou les catégories auxquelles appartient cet écoulement.

1. Le mouvement oscillatoire horizontal du fond d'un récipient provoque un champ de vitesses

$$\vec{v} = v_0 e^{-kz} \cos(\omega t - kz) \vec{u}_x$$

2. Le fluide compris entre deux plaques horizontales placées en $z = -e$ et $z = +e$, animées de vitesses respectives $v_0 \vec{u}_x$ et $-v_0 \vec{u}_x$, a pour champ des vitesses

$$\vec{v} = v_0 \frac{z}{e} \vec{u}_z$$

3. Le fluide compris entre deux plaques cylindriques coaxiales, de rayons respectifs r_1 et r_2 , de vitesses angulaires ω_1 et ω_2 , a pour champ des vitesses

$$\vec{v} = \left(\lambda r + \frac{\zeta}{r} \right) \vec{u}_\theta$$

où λ et μ sont des constantes qu'on déterminera.

Exercice 10 Montrer que le théorème de Gauss est équivalent à la loi de conservation de flux. Application : une fontaine linéique est un fil rectiligne infini d'où sort un fluide incompressible ; le débit volumique linéique est $d_V = \frac{dD_V}{dl}$. Montrer qu'un écoulement radial irrotationnel peut s'établir et préciser ses caractéristiques. Déterminer le potentiel des vitesses ϕ .

Exercice 11 On associe une fontaine et un puits linéiques de débits respectifs d_V et $-d_V$. Le fluide est incompressible et on se place en régime permanent. Soit \mathcal{P} un plan perpendiculaire aux deux axes, N et P les points d'intersection du plan avec le puits et la source respectivement, O le milieu de $[N, P]$ et M un point de \mathcal{P} défini par ses coordonnées polaires $r = OM$ et $\theta = (\overrightarrow{NP}, \overrightarrow{OM})$. Déterminer le champ des vitesses et le potentiel dans l'approximation dipolaire. Donner une allure de la topographie de l'écoulement.

Exercice 12 Un fluide incompressible de masse volumique μ se déplace en rencontrant un cylindre fixe, d'axe (O, z) , de rayon R et de centre O . Très loin de cet obstacle, le champ des vitesses est uniforme : $\vec{v}_0 = v_0 \vec{u}_x$. On se place en régime stationnaire.

1. Montrer que la superposition du champ uniforme et du champ du dipôle hydrodynamique (voir exercice précédent) :

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \frac{p}{2\pi r^2} (\cos \theta \vec{u}_r + \sin \theta \vec{u}_\theta)$$

représente un écoulement irrotationnel compatible avec les données à condition de choisir convenablement le moment dipolaire p . Donner une allure de la topographie.

2. Montrer que la superposition du champ uniforme et du champ du dipôle hydrodynamique (voir exercice précédent) et d'un champ dit de vortex :

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \frac{p}{2\pi r^2} (\cos \theta \vec{u}_r + \sin \theta \vec{u}_\theta) + \frac{\lambda}{r} \vec{u}_\theta$$

représente un écoulement irrotationnel compatible avec les données à condition de choisir convenablement le moment dipolaire p . Donner une allure de la topographie.