Feuille d'exercices numéro 6

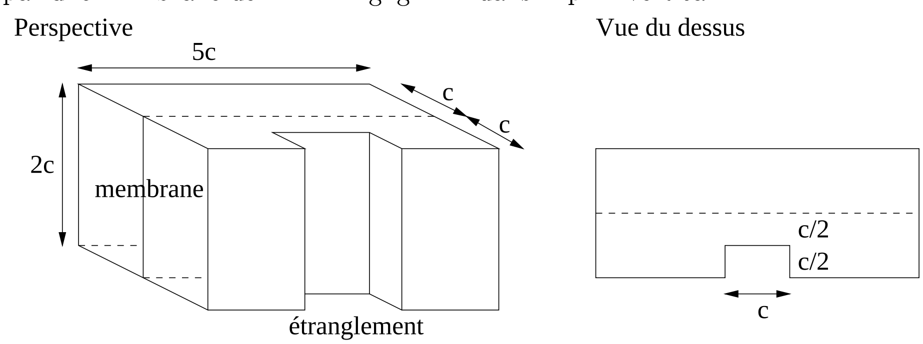
PC

25.10.2007

Exercice 1 Un réservoir cubique de côté a est plein d'eau. Un tuyau de vidange horizontal et cylindrique de section $S \ll a^2$ prend naissance à la base du réservoir. La pression atmosphérique P_0 règne au dessus de la surface et à la sortie de la canalisation. Déterminer la durée de vidange du réservoir.

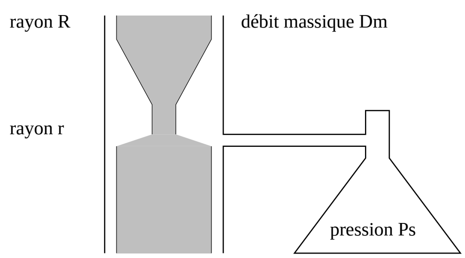
Exercice 2 Pour vidanger le même réservoir, on installe à sa base un tuyau cylindrique long, de section uniforme et dont l'extrémité débouche à une cote située plus bas de a que le fond du réservoir. On prend $z = 0$ au fond du réservoir ; le haut du réservoir est à la cote $z = a$, l'extrémité du tuyau à la cote $z = -a$. On note v_S la vitesse de sortie du fluide à l'extrémité du tuyau. Déterminer $P(z)$ en distingant $z > 0$ et $z < 0$ lorsque le niveau d'eau restant dans le réservoir est h. Montrer qu'on peut observer un phénomène de cavitation (c'est-à-dire l'apparition d'une bulle de gaz lorsque la pression atteint la pression de vapeur saturante P_S) dans le tuyau. Pour remédier à cela, on place à l'extrémité du tuyau une buse réductrice de diamètre, de S à s en sortie. Déterminer s pour éviter le phénomène de cavitation.

Exercice 3 Une canalisation horizontale, de section carrée $2c \times 2c$, de longueur $5c$, est séparée en deux par une membrane de masse négligeable dans le plan vertical.



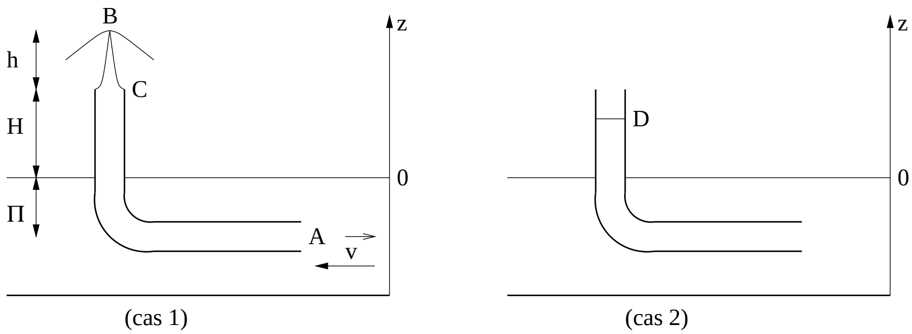
Dans les canaux ainsi délimités circule un fluide incompressible de masse volumique μ avec le même débit $\frac{D_m}{2}$ at avec la même pression d'injection P_0. À la suite d'un choc, l'une des deux canalisations présente un étranglement : sa largeur est réduite à $\frac{c}{2}$ en son centre sur une longueur c. Justifier qualitativement que la membrane subira une force. Donner l'exporession de cette force.

Exercice 4 Une trompe à eau est formée d'une canalisation rigide, de symétrie de révolution, dont le rayon est R à la sortie du robinet (débit massique D_m, pression P_i) et diminue à r au niveau médian ; en ce point, l'eau (de masse volumique μ) tombe dans une canalisation de récupération et la cavité est mise en communication avec l'intérieur d'un erlenmeyer (Büchner).



Déterminer le débit de l'eau permettant d'atteindre la pression de vapeur saturante de l'eau P_s dans l'erlenmeyer. On négligera le terme de pesanteur.

Exercice 5 La partie horizontale d'un tube coudé est immergée à la profondeur Π dans un courant d'eau uniforme et horizontal de vitesse constante v. Le liquide, parfait et incompressible de masse volumique μ, rentre dans le tube par une section contenant le point A. La section du tube, S, est uniforme entre A et C. Sa partie verticale émerge d'une hauteur H et est percée d'un orifice C. Le champ de pesanteur g est uniforme et la surface libre de l'eau est à la pression atmosphérique P_0 uniforme. Les deux cas possibles sont représentés sur la figure suivante.



A_∞ est un point situé sur la même horizontale que A, très loin en amont de A. Montrer que $P_A = P_0 + \mu g \Pi$.

1. Cas 1.
   (a) Montrer que $P(A) = P_0 + \mu g \Pi$.
   (b) En un point du tube de cote z, donner l'expression de la pression $P(z)$.
   (c) Exprimer la hauteur h du jet en fonction de v, g et H.
   (d) En déduire la vitesse minimale v correspondant à ce cas 1.
2. Cas 2.
   (a) Montrer que A est un point d'arrêt.
   (b) Exprimer $P(A)$ en fonction de P_0, μ, v, g et Π.
   (c) En déduire la cote z_D du point D.
3. A.N. : étudier les cas suivants : ($v = 10\mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-1}$, $H = 1\mathrm{m}$) et ($v = 3\mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-1}$, $H = 1\mathrm{m}$).

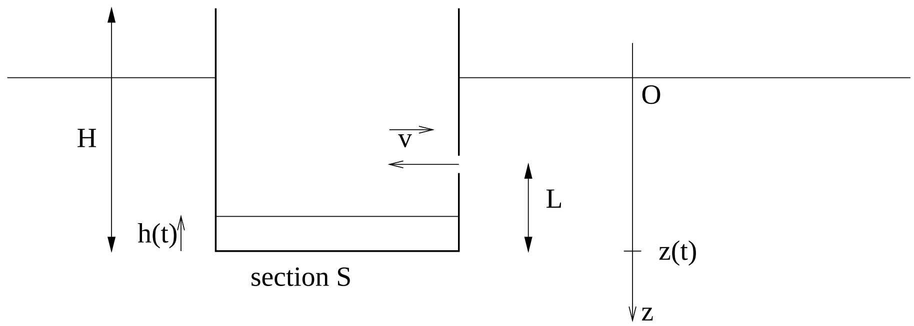
Exercice 6 Un puissant ventilateur produit un écoulement horizontal de l'air, (supposé pratiquement incompressible dans les conditions de l'expérience, de masse volumique μ), homocinétique $\vec{v} = v_0 \vec{u}_x$ et monobare $P = P_0$. Un cylindre de rayon R, de longueur L, de masse m et d'axe horizontal (O, z) est placé dans le souffle d'air. Il est animé d'un mouvement de rotation de vitesse angulaire $\vec{\omega} = -\omega \vec{u}_z$ avec $\omega = \frac{v_0}{R}$. On modélise l'écoulement par la loi suivante où $\vec{u}_y$ est vertical vers le haut :

$$\vec{v} = \vec{v}_0 - \frac{R^2}{r^2} v_0 (\cos\theta \vec{u}_r + \sin\theta \vec{u}_\theta) - \frac{R^2 \omega}{r} \vec{u}_\theta$$

Cet écoulement a été étudié dans la précédente feuille d'exercices à laquelle on renvoie pour la structure (superposition du champ uniforme, d'un champ de type doublet hydrodynamique et d'un vortex).

1. Déterminer le champ des vitesses à la surface de la couche limite.
2. Déterminer les points d'arrêt du fluide.
3. Déterminer le champ des pressions à la surface de la couche limite.
4. Déterminer les composantes de la force de pression s'exerçant sur la languette comprise entre θ et $\theta + d\theta$.
5. En déduire par intégration la résultante des forces de pression.
6. Montrer qu'un effet de lévitation est possible.

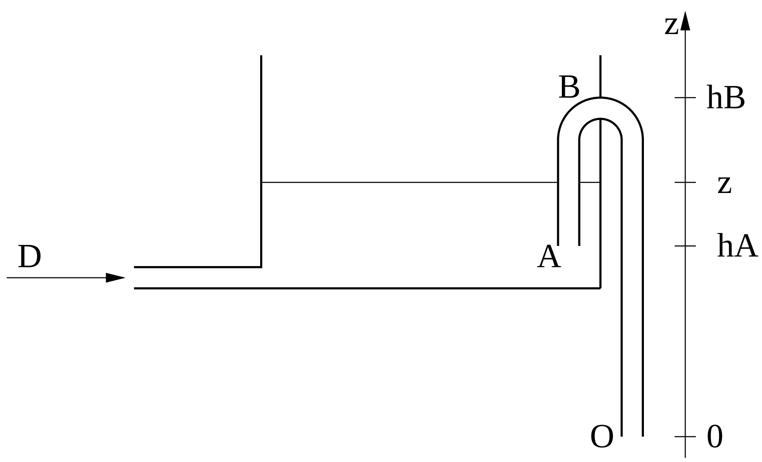
Exercice 7 On modélise ainsi le naufrage d'un bateau : la coque est assimilée à un cylindre droit vertical, fermé en bas, ouvert en haut, de section S, de hauteur H, de masse M ; la coque est percée d'un trou de section s petite devant S, situé à une hauteur L au dessus du fond de la coque ; $h(t)$ est la hauteur de l'eau rentrée dans le fond de la coque ; $z(t)$ est la profondeur du fond de la coque mesurée depuis la surface de la mer, (O, z) est orienté vers le bas.



On note μ la masse volumique de l'eau, g l'accélération de la pesanteur et P_0 la pression atmosphérique uniforme.

1. Écrire la condition d'équilibre du bateau en l'absence d'eau.
2. Montrer, lorsque l'eau commence à rentrer, que si on suppose que la vitesse d'enfoncement du bateau reste faible, alors $M + \rho S h(t) = \rho S z(t)$.
3. Déterminer la vitesse d'entrée v de l'eau à la date t.
4. En déduire l'équation différentielle vérifiée par $h(t)$.
5. Déterminer la date à laquelle le niveau de l'eau atteindra l'orifice.

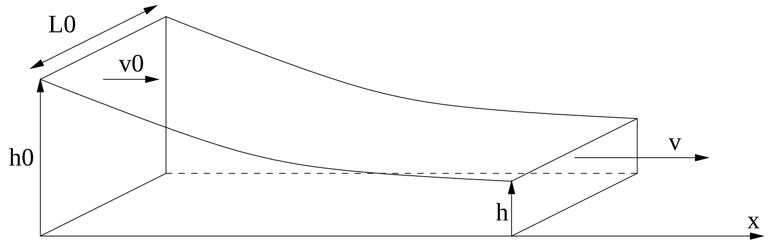
Exercice 8 Le vase de tantale est schématisé sur la figure suivante. s est la section du siphon, S celle du réservoir ; le réservoir est alimenté avec un débit volumique constant D.



On prend $D = 120\text{cm}^3 \cdot \text{s}^{-1}$, $h_A = 90\text{cm}$, $h_B = 120\text{cm}$, $h_M = 140\text{cm}$, $s = 1\text{cm}^2$, $S = 80\text{cm}^2$ et $g = 9,81\text{m} \cdot \text{s}^{-2}$.

1. On suppose que le siphon est amorcé (plein d'eau). Déterminer la vitesse d'écoulement v_O en O en fonction de z.
2. Établir l'équation différentielle vérifiée par z.
3. Résoudre cette équation quand $D = 0$.
4. Montrer qu'un régime permanent peut s'établir lorsque $D \neq 0$ et donner dans ce cas le niveau d'eau z_p.
5. Montrer que lorsque $D \neq 0$, on peut observer des oscillations.

Exercice 9 On considère une voie d'eau en écoulement permanent, de grande largeur L_0. La hauteur d'eau $h(x)$ varie et la vitesse v est supposée horizontale et uniforme sur une section verticale de la rivière : $\overrightarrow{v} = v(x)\overrightarrow{u}_x$. On note h_0 et v_0 leurs valeurs en $x = 0$.



1. Montrer quil existe une constante h_s fonction de h_0 et v_0 telle que $h + \frac{v^2}{2g} = h_s$.
2. Exprimer le débit D en fonction de h et des paramètres L_0, g et h_s.
3. Tracer l'allure de la courbe représentative de D en fonction de h.
4. Le débit D étant fixé, montrer graphiquement que deux valeurs h_1 et h_2 sont possibles pour h. Justifier que l'un des deux s'appelle le régime torrentiel, l'autre le régime fluvial.
5. On suppose que la présence d'un pilier de pont fait passer la largeur de L_0 à $L_0(1 - \varepsilon)$ avec $\varepsilon \ll 1$. Dans ce cas, on peut établir en effectuant le DL que la conservation du débit entraîne une variation de la hauteur doinnée par la formule

$$\Delta h \simeq \frac{\varepsilon h(h_s - h)}{h_s - \frac{3}{2}h}$$

Que constate-t-on alors (discuter suivant le type d'écoulement) ?