Feuille d'exercices numéro 12

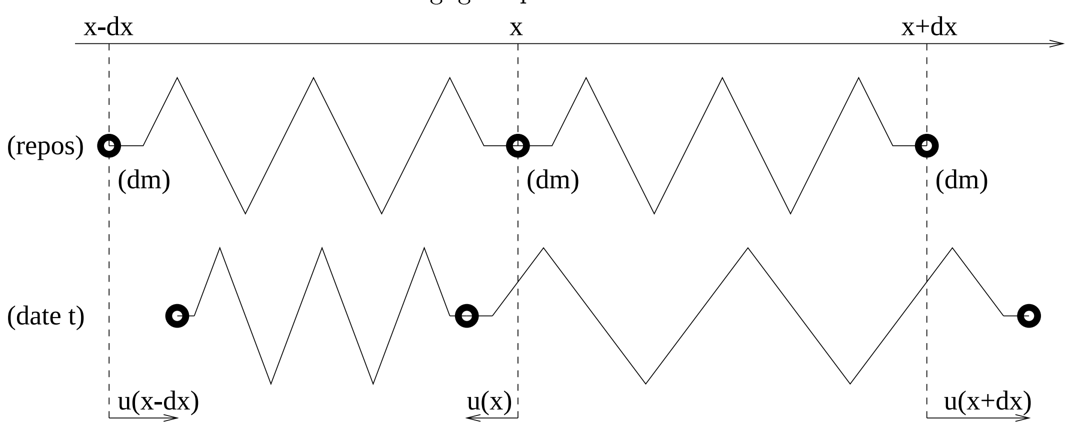
PC

13 décembre 2007

Exercice 1 On crée à l'extrémité S d'une corde horizontale tendue une perturbation verticale : on soulève S de 2cm en $0,1$s puis on le ramène à sa position initiale en $0,2$s. L'onde ainsi créée se propage sans se déformer le long de la corde. On suppose que la perturbation qui a affecté S à la date $t = 0$ affecte tour à tour chacun des points de la corde et se propage avec une célérité $c = 1\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$.

1. Tracer l'histoire du point S d'abscisse $x = 0$.
2. Tracer ensuite les histoires de A ($x = 0,1$m), B ($x = 0,2$m),C ($x = 0,3$m) et D ($x = 0,4$m).
3. Tracer l'allure de la photographie de la corde aux dates $t = 0$, $t = 0,1$s, $t = 0,2$s, $t = 0,3$s et $t = 0,4$s.

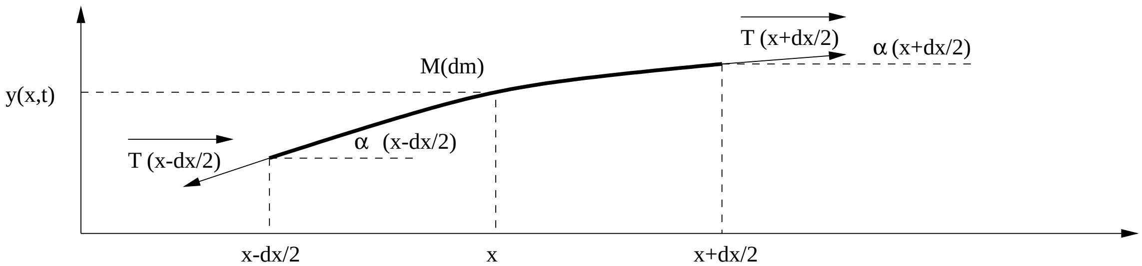
Exercice 2 On modélise un élastique de masse linéïque μ par une chaîne d'oscillateurs élastiques formés de masselottes élémentaires séparées par des ressorts. Les masselottes coulissent sans frottement sur l'axe horizontal et on néglige le poids devant les autres forces.



1. Justifier les hypothèses suivantes. Les masses dm sont proportionnelles à dx : $dm = \lambda dx$. Les constantes de raideur des ressorts sont inversement proportionnelles à dx : $k = \frac{\chi}{dx}$. Les longueurs à vide sont égales à dx : $\ell_0 = dx$.
2. Préciser le nom et l'unité de μ et ceux de $\frac{1}{\chi}$.
3. L'élastique est cylindrique, de longueur à vide L_0 et de section S. Il est fait dans un matériau de module d'Young E et de masse volumique ρ. Donner les expressions de $lambda$ et de χ en fonction de E, ρ et S.
4. En écrivant la deuxième loi de Newton pour la masse centrale, établir l'équation de d'Alembert vérifiée par l'élongation longitudinale u. Préciser la célérité c.
5. Résoudre l'équation de d'Alembert en choisissant comme conditions aux limites

$$u(0, t = U_0 \cos(\omega t) \quad \text{et} \quad u(L, t) = 0$$

Exercice 3 Onde mécanique. On considère une corde horizontale de masse linéïque μ, de longueur L, tendue entre ses deux extrémités fixes S et E. On note T_E la tension supposée constante aux extrémités de la corde. Dans l'hypothèse des petites vibrations transversales, la perturbation vibratoire est définie par l'altitude $y(x,t)$ du point M d'abscisse x à la date t, repérée par rapport à l'axe horizontal de la corde au repos. On étudie un élément de corde de longueur infinitésimale dx centré autour de l'abscisse x, de masse $dm = \mu dx$. On note α l'angle d'inclinaison entre la tangente à la corde et l'horizontale et on fait l'hypothèse des petits angles. $T(x,t)$ est la norme de la tension de la corde au point d'abscisse x à la date t. On néglige le poids devant les autres forces.



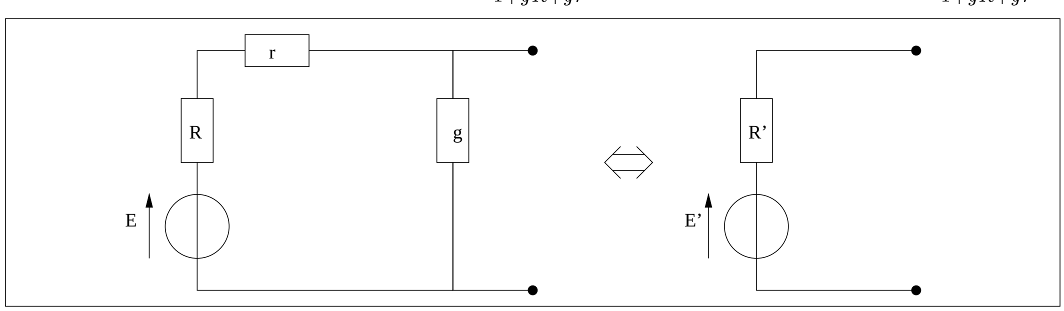
1. Établir l'équation de d'Alembert vérifiée par y.
2. Vérifier qu'une fonction du type $y(x,t) = Y\cos(\omega t \pm kx - \varphi)$ convient. En déduire la célérité de l'onde mécanique progressive.
3. Vérifier qu'une fonction du type $y(x,t) = Y\cos(kx - \theta)\cos(\omega t - \psi)$ convient. Montrer qu'il est possible d'imposer les conditions aux limites $y(0,t) = y(L,t) = 0$ pour cette onde stationnaire.

Exercice 4 Vérifier que, le long d'une corde $[S,E]$, de longueur $SE = L$, d'extrémité E fixe, un système d'ondes stationnaires s'installe si l'on considère la superposition :

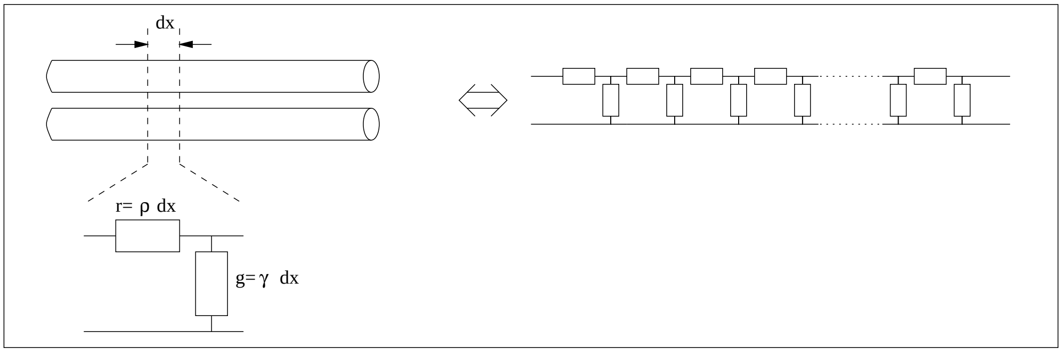
1. d'une onde incidente progressive se déplçant dans le sens des x croissants émise par S avec $y_S(t) = a\cos(\omega t)$
2. et d'une onde réfléchie progressive se déplçant dans le sens des x décroissants émise par une source virtuelle S', symétrique de S par rapport à E avec $y_{S'}(t) = -y_S(t) = -a\cos(\omega t)$.

Exercice 5 Thévenin - Norton et onde électrique.

1. **Préliminaire**. Un réseau source est constitué d'un générateur idéal de tension de force électro-motrice E et de trois résistors, les deux premiers de résistances R et r, le troisième de conductance g (donc de résistance $\frac{1}{g}$). Montrer que ce réseau est équivalent à un générateur de Thévenin de force électromotrice $E' = \frac{E}{1+gR+gr}$ et de résistance interne $R' = \frac{R+r}{1+gR+gr}$.



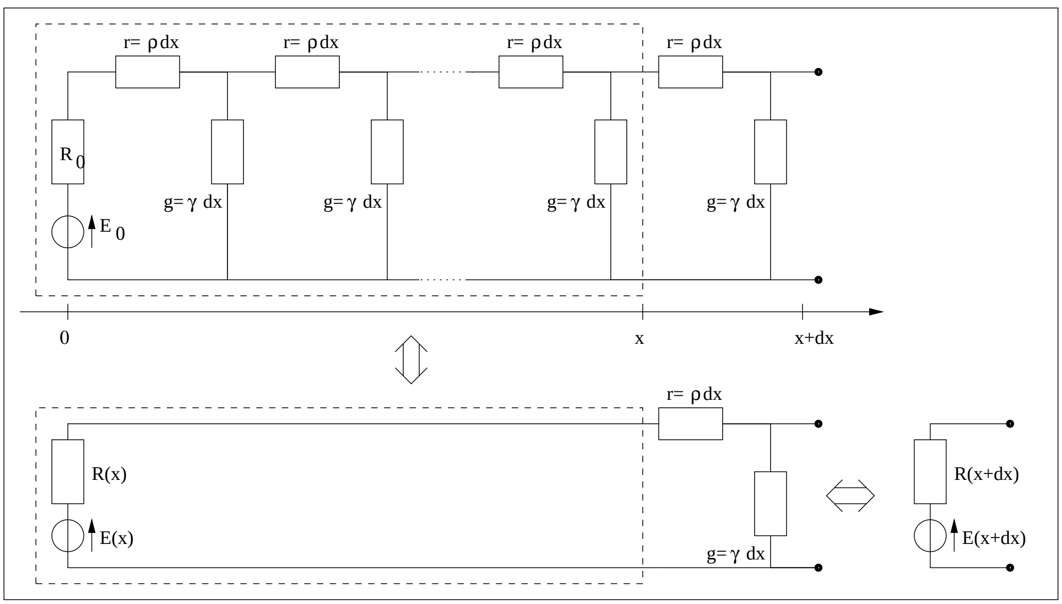
2. Une ligne bifiliaire est constituée de deux fils de cuivre parallèles, séparés par un isolant. Son comportement électrique est modélisé par une chaîne de résistors. Plus précisément, un tronçon de longueur infinitésimale dx de cette ligne est modélisé par deux résistors, le premier de résistance $r = \rho dx$ et le second de conductance $g = \gamma dx$:



(a) Quelles sont les unités et les noms qu'ont peut donner aux grandeurs ρ et γ ?

(b) Proposer une justification physique à cette modélisation.

3. On branche, à l'extrémité gauche de la ligne bifiliaire, un générateur de Thévenin de force électromotrice E_0 et de résistance interne R_0. On note $E(x)$ et $R(x)$ les caractéristiques du générateur de Thévenin équivalent à la portion comprise entre les abscisses 0 et x. On a en particulier $E(0) = E_0$ et $R(0) = R_0$. On cherche à établir les équations différentielles vérifiées par les fonctions $E(x)$ et $R(x)$. Pour cela, on cherche les relations entre $E(x)$, $R(x)$ et $E(x + dx)$, $R(x + dx)$.



(a) En utilisant le préliminaire, établir les expressions de $E(x + dx)$ et de $R(x + dx)$ en fonction de $E(x)$, $R(x)$, ρ, γ et dx.

(b) On néglige les termes du second ordre, c'est-à-dire qu'on fait disparaître les termes en dx^2, et on utilise les approximations $\frac{1}{1+\alpha dx} \simeq 1 - \alpha dx$ et $\frac{1}{1-\alpha dx} \simeq 1 + \alpha dx$ (α étant un coefficient quelconque). On rappelle que $\frac{dA}{dx} = \frac{A(x+dx)-A(x)}{dx}$. Établir les équations différentielles

$$\begin{cases} (\mathrm{I}) \ : \ \frac{dR}{dx} = \rho - \gamma R^2(x) \\ (\mathrm{II}) \ : \ \frac{dE}{dx} = -\gamma R(x) E(x) \end{cases}$$

On pourra admettre la validité de ces équations pour la fin du problème.

(c) Montrer que la solution constante $R = R_0 = \sqrt{\frac{\rho}{\gamma}}$ vérifie bien l'équation (I).

(d) En déduire dans ce cas l'expression de $E(x)$ en résolvant l'équation (II).

(e) On prend $\rho = 0,1$ (avec l'unité trouvée à la question 2.b)), $\gamma = 0,1$ (avec l'unité trouvée à la question 2.b)) et $E_0 = 100\text{V}$. On ferme la ligne de longueur $L = 2,50\text{m}$ sur un résistor de résistance $R_1 = 50,0\Omega$. Calculer R_0, $E(L)$, $R(L)$ et en déduire l'intensité i circulant dans R_1.

4. On suppose maintenant que le tronçon de longueur dx est assimilable à une inductance en série $L = \Lambda dx$ (qui remplace ρdx) et une capacité en parallèle $C = \Gamma dx$ (qui remplace γdx). Établir les équations aux dérivées partielles reliant $u(x,t)$ et $i(x,t)$. En déduire l'équation de d'Alembert vérifiée par ces deux fonctions et préciser la célérité de l'onde.

Exercice 6 Établir l'équation de d'Alembert vérifiée par les champs électromagnétiques $\overrightarrow{E}$ et $\overrightarrow{B}$ dans le vide en supposant (hypothèse de l'onde plane) que $\overrightarrow{E} = \overrightarrow{E}(x,t)$ et que $\overrightarrow{B} = \overrightarrow{B}(x,t)$.