

# Feuille d'exercices numéro 17

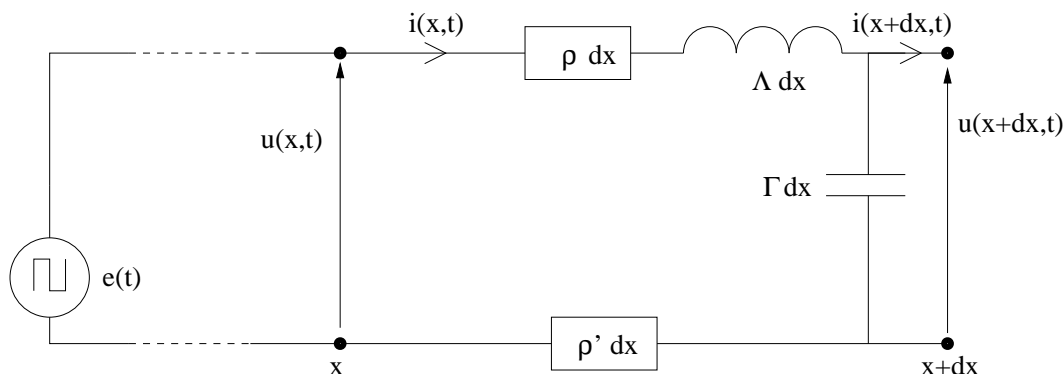
PC

25.01.2008

**Exercice 1** On considère un fluide visqueux régi par l'équation de Navier-Stokes, dans laquelle on note  $\eta$  la viscosité exprimée en Poiseuille. Établir les équations linéarisées dans l'approximation acoustique. En déduire l'équation de dispersion. Montrer que l'onde acoustique est amortie.

**Exercice 2** Une onde plane  $u(x, t)$  a pour vecteur d'onde complexe  $\vec{k} = k \vec{u}_x$  avec la relation de dispersion  $k = \pm \frac{\omega - j\omega_0}{c}$ . Établir une équation aux dérivées partielles du second ordre compatible avec cette relation et déterminer les expressions de  $v_g$  et  $v_\varphi$ .

**Exercice 3 Ligne bifilaire.** Un tronçon élémentaire de longueur  $dx$  est modélisé par le schéma suivant :



Établir le système d'équations aux dérivées partielles vérifiées par  $u$  et  $i$ . En déduire la relation de dispersion et décrire qualitativement quelle en est la conséquence sur la propagation du signal de tension rectangulaire émis par le GBF.

**Exercice 4 Cornet acoustique.** On assimile un tel cornet (*cf.* Professeur Tournesol dans *Objectif Lune*) à une tuyère d'axe de révolution  $\Delta = (O, x)$  et de section  $S(x) = S_0 e^{-\frac{x}{\delta}}$ . On étudie la propagation des ondes sonores dans ce cornet selon l'approximation acoustique en posant

$$P = P_0 + p_1, \quad \mu = \mu_0 + \mu_1 \quad \text{et} \quad \vec{v} = v_0 \vec{u}_x + v_1 \vec{u}_x$$

Établir l'équation linéaire de propagation vérifiée par  $v_1$ , établir l'équation de dispersion et montrer qu'il est possible d'observer une onde amplifiée si  $\omega$  est supérieure à une pulsation de coupure  $\omega_c$  dont on précisera l'expression en fonction de  $\mu_0$ ,  $\chi_S$  et  $\delta$ .

**Exercice 5** Une onde électromagnétique plane monochromatique, de vecteur d'onde incident  $\vec{k}_i = k_{ix} \vec{u}_x + k_{iy} \vec{u}_y$  et se propageant dans un milieu diélectrique d'indice  $n_1$ , arrive avec un angle d'incidence  $i$  sur un dioptré plan ( $x = 0$ ) séparant le milieu d'indice  $n_1$  d'un milieu d'indice  $n_2$ . On note  $\vec{k}_r$  et  $\vec{k}_t$  les vecteurs d'onde des ondes réfléchi et transmise dans le plan d'incidence  $(O, x, y)$ . En utilisant l'identité des composantes tangentielles des vecteurs d'onde et la relation de dispersion dans le milieu 2, montrer que dans le cas  $n_1 \sin i > n_2$ , la loi de Descartes interdit la réfraction alors qu'une onde stationnaire existe pourtant dans le milieu 2. Cette onde dite évanescente peut-elle être détectée ?

**Exercice 6 Plasma.** À très haute température, les constituants d'un gaz monoatomique ou moléculaire ont tendance à s'ioniser. Le modèle le plus simple de **plasma** est celui d'un milieu dilué formé de cations immobiles de charge  $+e$  et d'électrons libres de charge  $-e$  de masse  $m_e$ , sans interaction électrique. On note  $n_0$  le nombre moyen d'électrons ou de cations par unité de volume mésoscopique. Sous l'action d'un champ électrique, les électrons libres sont mis en mouvement et on observe l'établissement d'un courant volumique local.

1. Montrer que dans un plasma, l'existence d'un champ électrique s'accompagne d'un **courant électrique** régi par :

$$\text{(T.C.I.) : } m_e \frac{\partial \vec{v}_e}{\partial t} = -e \vec{E} \quad \text{et} \quad \vec{j} = n_0(-e) \vec{v}_e$$

2. On étudie la possibilité de la propagation d'une pseudo-onde plane progressive harmonique dans un plasma ; on note  $\omega$  la pulsation et  $\vec{k} = k \vec{u}_x$  le vecteur d'onde (a priori complexe). Les champs électrique, magnétique, les densités de charge et de courant sont reliés par les six équations :

- les quatre équations de Maxwell ;
- les deux lois reliant  $\vec{j}$ ,  $\vec{v}_e$  et  $\vec{E}$

Traduire ces six équations en formalisme complexe.

3. Par analogie avec les propriétés du métal conducteur, on définit la **conductance complexe du plasma** par :

$$\underline{\gamma} = \frac{n_0 e^2}{j m_e \omega}$$

et en régime sinusoïdal forcé  $\vec{j} = \underline{\gamma} \vec{E}$ . En déduire la relation de dispersion dans les plasmas reliant l'amplitude complexe du vecteur d'onde  $\underline{k}$  et la pulsation  $\omega$  :

$$\underline{k}^2 = \frac{\omega^2 - \frac{n_0 e^2}{\epsilon_0 m_e}}{c_0^2}$$

4. Le carré de  $\underline{k}$  est réel. En déduire l'existence d'une pulsation de coupure  $\omega_c$  et discuter deux cas selon la position de  $\omega$  par rapport à  $\omega_c$ .
5. Dans le cas  $\omega > \omega_c$ , exprimer les vitesses de groupe et de phase et tracer l'allure de leurs variations. Commenter ces courbes.
6. A.N. : calculer  $\omega_c$  pour un plasma d'hélium assimilé à un gaz parfait à la pression  $P_0 = 1,013 \cdot 10^5$  Pa et à la température  $T = 1000$  K.
7. Comparer les notions de distance caractéristique d'amortissement dans un plasma et d'épaisseur de peau dans un bon conducteur.

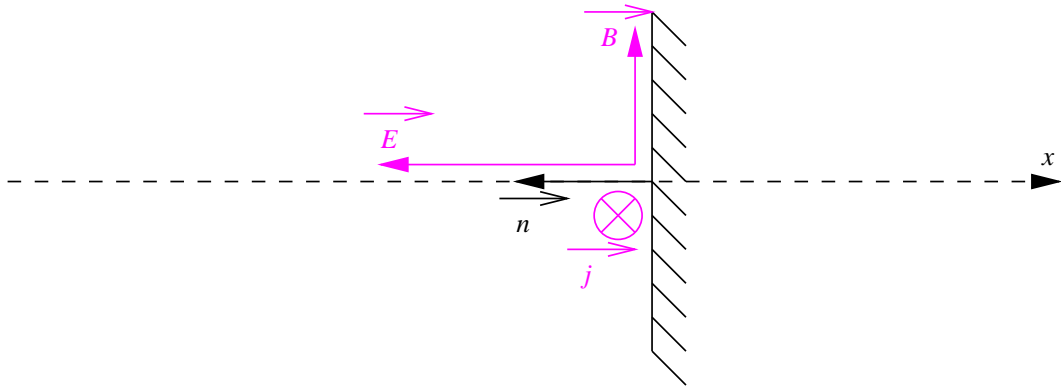
**Exercice 7 Réflexion sur un métal conducteur parfait.** Un conducteur est dit **parfait** si sa conductivité  $\gamma$  est infinie.

1. Montrer que dans un conducteur parfait :

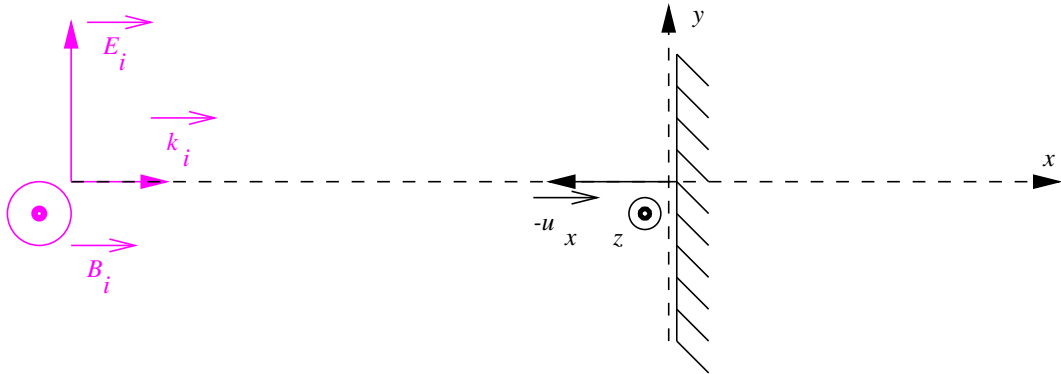
$$\vec{E} = \vec{0}, \quad \vec{B} = \vec{0}, \quad \rho = 0, \quad \vec{j} = \vec{0}$$

2. Les charges et courants ne peuvent donc être non nuls qu'en surface. Les équations de continuité permettent de relier ceux-ci aux champs en surface à l'extérieur du métal. On suppose que le demi-espace  $x > 0$  est rempli d'un métal conducteur parfait. Montrer qu'à la surface d'un plan conducteur parfait ( $x = 0$ ), de vecteur normal  $\vec{n} = -\vec{u}_x$ , les **densités surfaciques** de **charge**  $\rho$  et de **courant**  $\vec{j}_s$  créent des champs

$$\vec{E}(x = 0^-) = \vec{E}_N = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{n} \quad \text{et} \quad \vec{B}(x = 0^-) = \vec{B}_T = \mu_0 \vec{j}_s \wedge \vec{n}$$



3. On étudie la réflexion sous incidence normale d'une onde électromagnétique incidente, plane progressive harmonique de vecteur d'onde  $\vec{k} = k\vec{u}_x$  et de pulsation  $\omega$  se propageant dans le vide ( $x < 0$ ), sur un plan conducteur parfait en  $x = 0$ . Pour alléger les notations, on choisit la phase de l'onde incidente  $\varphi_i = 0$  en  $t = 0$  et  $x = 0$ , d'où  $\vec{E}_i = E_0 \cos(\omega t - kx) \vec{u}_y$  et  $\vec{B}_i = \frac{E_0}{c_0} \cos(\omega t - kx) \vec{u}_z$ .



Établir que la charge surfacique  $\sigma_S$  est nulle mais pas le courant surfacique  $\vec{j}_S$ , donner son expression ainsi que celle des champs caractérisant l'onde réfléchie ( $\vec{E}_r, \vec{B}_r$ ).

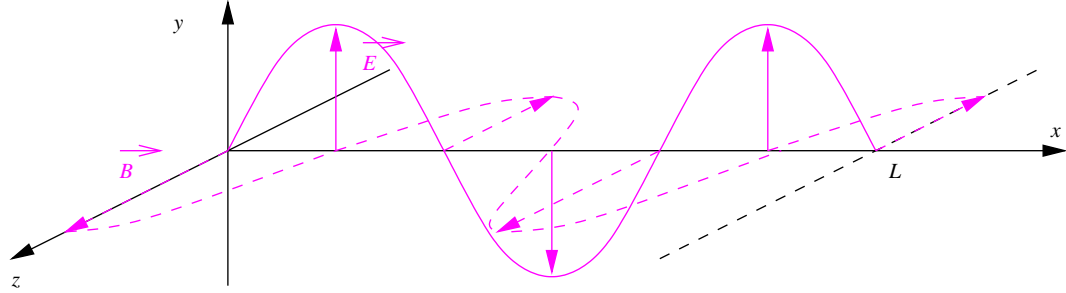
4. A.N. : la paroi plane métallique conductrice parfaite d'une capsule spatiale en orbite autour de la Terre reçoit la lumière du Soleil sous incidence normale. La radiation est émise sous la forme d'une onde sphérique (qu'on pourra supposer monochromatique pour simplifier) depuis la surface du Soleil. On donne la puissance de l'onde émise  $\mathcal{P} = 3,82 \cdot 10^{26} \text{W}$  et la distance Soleil-Terre  $r_T = 1,55 \cdot 10^{11} \text{m}$ . Déterminer l'amplitude de la densité de courant surfacique engendré par la réflexion de la lumière sur la paroi. Ce courant génère-t-il de la chaleur par effet Joule ?
5. On se place entre deux plans conducteurs en  $x = 0$  et  $x = L$ .



On cherche une onde stationnaire du type :

$$\begin{cases} \vec{E} = E_0 \cos(\omega t - \varphi_E) \cos(kx - \psi_E) \vec{u}_y \\ \vec{B} = B_0 \cos(\omega t - \varphi_B) \cos(kx - \psi_B) \vec{u}_z \end{cases}$$

Préciser les conditions aux limites, montrer qu'un régime d'ondes planes stationnaires peut s'établir et que le vecteur d'onde et la pulsation sont alors **quantifiés**. Vérifier que la figure suivante est cohérente avec ces résultats :



Commenter.

6. On étudie la propagation d'une onde plane deux plans, de direction de propagation **parallèle** aux plans. On considère la propagation d'une onde électromagnétique monochromatique entre deux plans conducteurs parfaits  $z = 0$  et  $z = a$ . On cherche une solution onde plane dont la structure est

$$\vec{E} \begin{vmatrix} 0 \\ E(z)e^{j(\omega t - kx)} \\ 0 \end{vmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{B} \begin{vmatrix} B_x(z)e^{j(\omega t - kx)} \\ B_y(z)e^{j(\omega t - kx)} \\ B_y(z)e^{j(\omega t - kx)} \end{vmatrix}$$

Montrer qu'une telle onde électromagnétique plane vérifie la condition de quantification :

$$\omega^2 = k^2 c_0^2 + n^2 \frac{\pi^2 c_0^2}{a^2}, \quad n \in \mathbb{N}$$

En déduire que la propagation n'est possible que si  $\omega > \omega_c$ , où on précisera l'expression de la **pulsation de coupure**  $\omega_c$ . Établir la relation de dispersion.

7. Un **guide d'ondes infini rectangulaire** est délimité par deux paires de plans infinis conducteurs perpendiculaires entre elles :  $y = 0$  et  $y = a$  d'une part,  $z = 0$  et  $z = b$  d'une part. Les quatre conditions aux limites doivent être satisfaites. Le **mode transverse électrique**  $TE_{10}$  correspond à une onde se propageant selon  $\vec{u}_x$  ( $TE$ ), dont le champ électrique est non nul selon  $\vec{u}_y$  et nul selon  $\vec{u}_z$  (10). Étudier ce mode.