Feuille d'exercices numéro 18, PC

Problèmes de synthèse OEM dans le vide

02.02.2008

Cette feuille d'exercices rassemble les questions les plus délicates relatives au problème des ondes électromagnétiques dans le vide.

Exercice 1 Aspect énergétique de l'onde plane polarisée circulairement.

Poynting et polarisation [oral CCP]

Une onde plane a pour champ électrique

$$\overrightarrow{E}(z,t) = \left| \begin{array}{l} E_0 \cos(\omega t - kz) \\ E_0 \sin(\omega t - kz) \\ 0 \end{array} \right.$$

1. Quel est l'état de polarisation de cette onde ?
2. Montrer que cette onde est la superposition de deux ondes planes polarisées rectilignement, $\overrightarrow{E}_1(z,t)$ selon $\overrightarrow{u}_x$ et $\overrightarrow{E}_2(z,t)$ selon $\overrightarrow{u}_y$, de même vecteur d'onde $\overrightarrow{k} = k\overrightarrow{u}_z$.
3. En déduire les vecteurs $\overrightarrow{B}_1(z,t)$ et $\overrightarrow{B}_2(z,t)$ puis le vecteur résultant $\overrightarrow{B}(z,t)$.
4. En déduire le vecteur de Poynting $\overrightarrow{\Pi}(z,t)$.
5. Commenter le résultat obtenu.

Exercice 2 Éléments de la théorie des lames à retard.

Déphasage et polarisation [oral Centrale]

Un modèle rudimentaire du comportement microphysique des milieux diélectriques linéaires homogènes mais non isotrope est le suivant. Lorsque le champ électrique est selon une direction donnée, il interfère avec la matière par une succession d'absorptions et de réémissions de photons par les atomes ou ions du cristal selon le modèle quantique. Cette succession d'absorptions et de réémissions explique que, bien que la lumière se propage toujours à la vitesse c_0 dans le vide interatomique, elle est ralentie par le délai séparant l'excitation de l'atome par absorption du photon et sa désexcitation (ou relaxation) par réémission d'un photon de même énergie, donc correspondant à une OEM de même pulsation. Ainsi, l'anisotropie électrique du milieu peut expliquer qu'il existe des directions privilégiées de champ électrique selon lesquelles

- *l'interaction avec la matière est importante, donc les absorptions-réémissions seront fréquentes, donc la lumière sera fortement "rallentie" (l'axe lent)*
- *ou bien l'interaction avec la matière est faible, donc les absorptions-réémissions seront rares, donc la lumière sera faiblement "rallentie" (l'axe rapide).*

On considère une lame à faces parallèles de vecteur normal $\overrightarrow{u}_z$, d'épaisseur e (comprise entre les plans $z = 0$ et $z = e$), taillée dans un milieu tel qu'une OPPH PR selon l'axe rapide $\overrightarrow{u}_X$ (respectivement l'axe lent $\overrightarrow{u}_Y$) le traverse à la célérité c_X (respectivement c_Y) ; on suppose que $c_X > c_Y$. Soit une onde incidente OPPHM de vecteur d'onde $\overrightarrow{k} = k\overrightarrow{u}_X$, polarisée rectilignement dont le champ électrique fait un angle α avec $\overrightarrow{u}_X$ et de phase nulle en $z = 0$.

1. Donner l'expression de $\overrightarrow{E}(z,t)$ pour $z \leq 0$.
2. En déduire que cette onde est la superposition de deux OPPHM PR de champs électriques $\overrightarrow{E}_X(z,t)$ et $\overrightarrow{E}_Y(z,t)$ selon respectivement $\overrightarrow{u}_X$ et $\overrightarrow{u}_Y$. Préciser les expressions de $\overrightarrow{E}_X$ et $\overrightarrow{E}_Y$ pour $z \leq 0$.

3. D'après le principe ondulatoire, ce qui se passe en $z = e$ est ce qui s'est passé en $z = 0$ à la date t - la durée que met l'onde à traverser la lame. En déduire les expressions de $\overrightarrow{E}_X$ et $\overrightarrow{E}_Y$ pour $z \geq 0$.
4. En déduire l'expression de $\overrightarrow{E}(z,t)$ pour $z \geq e$.
5. Déterminer la plus petite valeur de e pour laquelle l'onde émergente est polarisée elliptiquement avec pour axe principaux $\overrightarrow{u}_X$ et $\overrightarrow{u}_Y$. Comment nomme-t-on alors une telle lame ? Justifier cette appellation.

Exercice 3 Modèle photonique, voile solaire, courbure de la queue des comètes.

Poynting, énergie électromagnétique volumique [oral Centrale]

Dans le modèle photonique, on quantifie l'onde électromagnétique dans le vide. Le quantum est appelé le photon ; ses caractéristiques sont les suivantes :

- sa vitesse est égale à la célérité de la lumière dans le vide, c_0.
- Son énergie totale est égale au produit $E = h\nu$, où h est la constante de Planck et ν la fréquence de l'onde électromagnétique associée.
- Bien que sa masse soit nulle, il possède une impulsion qui s'identifie, en mécanique classique, à la quantité de mouvement (ou résultante cinétique en mécanique du solide) $\overrightarrow{p} = \frac{h\nu}{c_0}\overrightarrow{u}_x$ oùă λ est la longueur d'onde et $\overrightarrow{u}_x$ le vecteur unitaire directeur de propagation de l'OEM associée.

On assimile, tant d'un point de vue énergétique que mécanique, une OPPHMPR à un flot de photons ; on définit en particulier n_0 comme étant le nombre moyen de photons incidents par unité de volume (unité m^{-3}).

1. **Détermination de l'expression de n_0.** Soit $\overrightarrow{E}\left|\begin{array}{l} 0 \\ E_0\cos(\omega t - kx) \\ 0 \end{array}\right.$ le champ électrique de l'OEM incidente. Donner l'expression du champ magnétique.
   (a) Première méthode : rappeler l'expression du vecteur de Poynting associé en fonction de ε_0, c_0, E et $\overrightarrow{u}_x$. Donner sa valeur moyenne dans le temps sur un plan d'abscisse x fixée. Rappeler l'expression de la valeur moyenne de la puissance incidente $< d\mathcal{P} >$ à travers une surface $d\overrightarrow{S} = dS\overrightarrow{u}_x$. Donner l'expression du nombre de photons dN frappant dS pendant dt en fonction de n_0, c_0, dt et dS. En déduire l'énergie correspondante $d\mathcal{E}$ en fonction de n_0, c_0, dt, dS, h et ν puis la puissance associée $< d\mathcal{P} >= \frac{d\mathcal{E}}{dt}$. En identifiant les deux expressions de $d\mathcal{P}$, en déduire l'expression de n_0 en fonction de ε_0, E_0, h et ν.
   (b) Deuxième méthode : rappeler l'expression de l'énergie électromagnétique volumique en fonction de ε_0, E, μ_0 et B puis en fonction de ε_0 et E seulement pour l'OPPHMPR considérée. En déduire sa valeur moyenne dans le temps $< u_{\mathrm{em}} >$ sur un plan d'abscisse x fixée en fonction de ε_0 et $E - 0$. Donner d'autre part l'expression de l'énergie photonique moyenne par unité de volume en fonction de n_0, h et ν. En identifiant les deux expressions de $< u_{\mathrm{em}} >$, en déduire l'expression de n_0 en fonction de ε_0, E, h et ν.
   (c) Expliquer, au vu de l'équation locale de Poynting, pourquoi on trouve le même résultat.
2. **Détermination de la pression photonique, appelée aussi pression de radiation**. On considère une plaque parfaitement réfléchissante dans le plan d'onde (contenue par exemple dans le plan $x = 0$) de surface dS. On verra dans un autre exercice l'interprétation ondulatoire de ses propriétés. Dans le modèle photonique, chaque photon incident rebondit en subissant un choc élastique, ce qui implique en particulier que l'impulsion $\overrightarrow{p}_f$ du photon après le rebond est exactement opposé à l'impulsion incidente $\overrightarrow{p}_i$.
   (a) Exprimer la variation d'impulsion $\delta\overrightarrow{p} = \overrightarrow{p}_f - \overrightarrow{p}_i$ subie par un photon en fonction de h, ν et c_0.
   (b) Combien de photons dN subissent-ils ce rebond sur la plaque pendant dt ? On exprimera le résultat en fonction de n_0, c_0, dt et dS.

(c) Par application du TRC, en déduire la force $\overrightarrow{f}_{p\to\varphi}$ exercée par la plaque sur les photons incidents en fonction de n_0, h, ν, c_0, dt, dS et $\overrightarrow{u}_x$. En déduire la force $\overrightarrow{f}_{\varphi\to p}$ exercée par les photons incidents sur la plaque.

(d) En déduire la pression photonique, ou pression de radiation P subie par la plaque de la part des photons en fonction de ε_0 et E_0.

3. **Voile solaire**. Un vaisseau spatial utilise une voile solaire, plane, de surface S, tendue avec Soleil arrière (vent arrière diraient les marins). On donne $\varepsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12}\text{F} \cdot \text{m}^{-1}$ et $\mathcal{G} = 6,67 \cdot 10^{-11}\text{kg}^{-1} \cdot \text{m}^3 \cdot \text{s}^{-2}$. La puissance électromagnétique rayonnée par le Soleil est $\mathcal{P}_S = 3,82 \cdot 10^{26}$ W. La masse du Soleil est $m_S = 2 \cdot 10^{30}\text{kg}$. On note r la distance Soleil-vaisseau et m la masse du vaisseau (comprenant celle de la voile).

   (a) Donner l'expression de la force attractive de gravitation $\overrightarrow{f}_g$ subie par le vaisseau de la part du Soleil.

   (b) En considérant que la puissance $\mathcal{P}_S$ est également diffusée dans toutes les directions de l'espace, montrer que la moyenne de la norme du vecteur de Poynting est $<\Pi>=\frac{\mathcal{P}_S}{4\pi r^2}$.

   (c) En remarquant que la pression de radiation ne dépend pas de la pulsation, on suppose pour simplifier que l'OEM reçue en r est plane, harmonique et monochromatique. Donner l'expression du carré de l'amplitude E_0^2 du champ électrique en fonction de $\mathcal{P}_S$, ε_0, c_0 et r.

   (d) Donner l'expression de la force motrice dûe à la pression de radiation $\overrightarrow{f}_r$ en fonction de $\mathcal{P}_S$, c_0, S, r et $\overrightarrow{u}_r$.

   (e) Le vaisseau veut s'éloigner du Soleil. En déduire l'expression du rapport $\frac{m}{S}$ maximal. À quelle grandeur s'identifie ce rapport, si on suppose que la masse de la voile est très supérieure à celle de la cabine ? Comparer aux valeurs usuelles pour le papier ; conclure.

4. **Courbure de la queue des comètes**. Les comètes sont des assemblages de roches, cailloux et de glace qui, lors de leur passage au périhélie, se désagrègent. On suppose que la queue d'une comète est constituée de sphères de glace de rayon R variable, les plus grosses étant situées près du noyau cométaire, les plus petites au bout de la queue. Cette comète est bien visible lorsque la queue est éclairée par le Soleil, à une distance r du centre du Soleil.

   (a) Pourquoi la force de gravitation exercée par le Soleil sur la sphère est-elle du type $-K_1 \cdot R^3\overrightarrow{u}_r$? Préciser l'expression de K_1 en ordre de grandeur.

   (b) Pourquoi la force de pression de radiation exercée par le rayonnement solaire est-elle du type $K_2 \cdot R^2\overrightarrow{u}_r$? Préciser l'expression de K_2 en ordre de grandeur.

   (c) Montrer l'existence d'une valeur critique du rayon de la sphère, R_c, telle que si $R > R_c$ la sphère est attirée, si $R < R_c$, la sphère est attirée.

   (d) En déduire la forme particulière courbée de la queue des comètes.

Exercice 4 OEM en présence de plaques conductrices.

$\boxed{\text{Maxwell, dispersion, quantification [oral X, CYR, AIR]}}$

On cherche à déterminer les caractéristiques d'une OEM monochromatique se propageant entre deux plans conducteurs parallèles. Pour celà, on doit d'abord préciser les caractéristiques du champ EM à l'intérieur (partie 1) et au voisinage (partie 2) d'un plan conducteur. Ensuite (partie 3), on montrera qu'une OEM non plane peut se propager entre les deux plans, et qu'il existe bel et bien une relation de dispersion, bien que le milieu de propagation soit le vide ; on retrouve ainsi en électromagnétisme un analogue de la dispersion en acoustique dans le cornet acoustique.

1. **OEM dans un métal conducteur**. Soit un métal bon conducteur de conductivité γ de l'ordre de 10^8 S·m^{-1}.

   (a) Écrire les équations de Maxwell en n'oubliant pas de simplifier l'une d'elle après avoir précisé l'hypothèse sous laquelle cette simplification est justifiée.

   (b) En déduire l'EDP relative au champ électrique (ou au vecteur densité de courant).

(c) On cherche une solution complexe sous la forme

$$\overrightarrow{\underline{E}}(x,t) = E_0 e^{j(\omega t - \underline{k}x + \varphi)} \overrightarrow{u}_y$$

Écrire et résoudre l'équation de dispersion. En déduire l'expression de $\overrightarrow{E}(x,t)$. Conclure.

(d) Dans le cas particulier du métal conducteur parfait, la résistivité ρ est nulle, donc son inverse γ tend vers l'infini. En déduire la nullité de $\overrightarrow{E}$, $\overrightarrow{B}$, ρ et $\overrightarrow{j}$ au sein du conducteur parfait.

(e) Faire un tableau général indiquant pour chaque milieu (* vide * régime stationnaire * AEQS * bon conducteur * diélectrique * plasma) la ou les hypothèses constitutives du milieu, la forme que prennent les équations de Maxwell dans ce cas et les principales conséquences relatives au champ EM ou aux OEM.

2. **Propriétés du champ EM au voisnage d'un conducteur parfait**. On a démontré à la question précédente que les quatre champs sont nuls au sein du conducteur parfait. Par suite, les charges et courants ne peuvent être que surfaciques. On note σ et $\overrightarrow{j}_S$ les densités surfaciques de charge et de courant.

   (a) Rappeler les équations de continuité des champs $\overrightarrow{E}$ et $\overrightarrow{B}$ à la traversée de la surface du conducteur.

   (b) Le métal occupe le demi-espace $x \geq 0$. Une OPPHMPR incidente arrive dans le vide des $x < 0$ avec $\overrightarrow{E}_i(M,t) = E_0 \overrightarrow{u}_y \cos(\omega t - kx)$. En déduire $\overrightarrow{B}_i$. Déterminer les champs électriques et magnétiques réfléchis et transmis conformes avec les lois précédentes. Montrer en particulier la nullité de σ et de $\overrightarrow{E}(0,t)$. Comment nomme-t-on cette condition aux limites ?

3. **OEM entre deux plaques**. Une OEM se propage entre deux plaques métalliques parfaitement conductrices d'équations $z = 0$ et $z = a$. On cherche une solution sous la forme

$$\overrightarrow{\underline{E}} \left| \begin{array}{l} 0 \\ E(z)e^{j(\omega t - kx)} \\ 0 \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \overrightarrow{\underline{B}} \left| \begin{array}{l} \underline{B}_x(z)e^{j(\omega t - kx)} \\ udlB_y(z)e^{j(\omega t - kx)} \\ \underline{B}_z(z)e^{j(\omega t - kx)} \end{array} \right.$$

   (a) Écrire les quatre équations de Maxwell en formalisme complexe. En déduire cinq équations complexe relatives aux fonctions $\underline{E}$, $\underline{B}_x$, $\underline{B}_y$ et $\underline{B}_z$.

   (b) En déduire l'équation différentielle du second ordre vérifiée par $E(z)$:

$$\frac{d^2E}{dz^2} + \left(\frac{\omega^2}{c_0^2} - k^2\right) E = 0$$

   (c) On rappelle les conditions aux limites $E(0) = E(a) = 0$. En déduire que le champ est non uniformément nul si et seulement si $\omega > kc$.

   (d) Dans ce cas, écrire la condition de quantification donnant $_omega$ en fonction d'un entier n.

   (e) Montrer que la solution n'est pas triviale si et seulement n est non nul et en déduire qu'il faut $\omega > \omega_c$, pulsation de coupure qu'on exprimera en fonction de a et c_0. En déduire une inégalité entre λ et a ; que vous évoque cette relation ?

   (f) Donner l'expression de ω en fonction de k et n (relation de dispersion). En déduire la vitesse de groupe, la vitesse de phase et la relation qui les lie toutes deux. Conclure