Feuille d'exercices numéro 12

Diffusion de particules, diffusion thermique

PC, 12 février 2009

Diffusion de particules

Exercice 1 Application numérique. La masse volumique du cuivre est $\rho_{Cu} = 8900\text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$, sa masse molaire atomique $M_{Cu} = 63,5\text{g}\cdot\text{mol}^{-1}$. On suppose que chaque atome possède deux électrons de conduction. Calculer numériquement la densité d'électrons de conduction du cuivre. On donne $\mathcal{N}_A = 6,02\cdot 10^{23}\text{mol}^{-1}$.

Exercice 2 Diffusion de charges. Un courant d'intensité i parcourt uniformément un conducteur cylindrique de section S. On note e la charge élémentaire. Déterminer les caractéristiques du vecteur densité de courant particulaire $\overrightarrow{j}_P$ (à ne pas confondre avec celle de courant électrique $\overrightarrow{j}$).

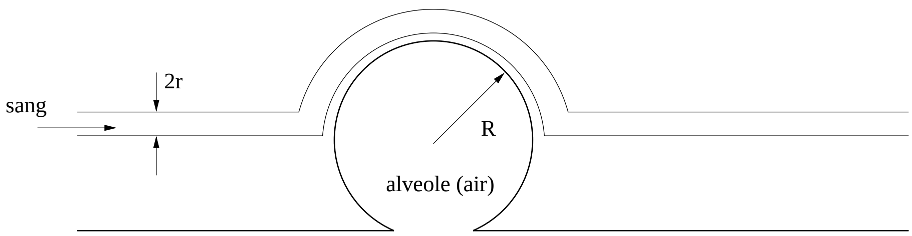
Exercice 3 Diffusion hémisphérique du parfum. Une goutte de parfum très volatile tombe au sol. Le parfum diffuse dans tout le demi-espace au dessus du sol, uniformément dans toutes les directions avec un débit massique d'évaporation D_m (en $\text{kg}\cdot\text{s}^{-1}$) et la masse molaire moléculaire du corps supposé pur est M (en $\text{kg}\cdot\text{mol}^{-1}$).

1. Exprimer la masse dm s'évaporant pendant dt.
2. Exprimer la quantité de matière $d\nu$ s'évaporant pendant dt.
3. Exprimer le nombre de molécules dN s'évaporant pendant dt.
4. Au point M à la distance r de la goutte, quelle est la forme et l'aire de la surface sur laquelle la densité de courant est uniforme ?
5. Exprimer le vecteur densité de courant particulaire $\overrightarrow{j}$.

Exercice 4 Tableau récapitulatif. Dresser un tableau récapitulatif des noms et unités des grandeurs N, n, ϕ, j, div $\overrightarrow{j}$, Γ, λ, $\frac{\partial n}{\partial t}$, $\|\overrightarrow{\text{grad}}\, n\|$, D et Δn.

Exercice 5 Bilan diffusif en géométrie cylindrique. Soit un objet à symétrie cylindrique d'axe (O,x) et de rayon R ; on y étudie un phénomène de diffusion unidimensionnelle radiale de particules de densité $n(r,t)$ et on note D le coefficient de diffusion. Par un bilan sur la tranche $\left[r-\frac{dr}{2}, r+\frac{dr}{2}\right]$, établir directement l'équation de diffusion radiale. Par une méthode analogue, établir directement l'équation de diffusion radiale dans une boule.

Exercice 6 Diffusion et oxygénation du sang. Le coefficient de diffusion du dioxygène dans l'air est $D = 1,8\cdot 10^{-5}\text{m}^2\cdot\text{s}^{-1}$ et dans le sang $D' = 1,0\cdot 10^{-9}\text{m}^2\cdot\text{s}^{-1}$; le sang se charge en dioxygène en passant à la vitesse $v = 1,0\cdot 10^{-3}\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ dans un très petit vaisseau (un capillaire) de diamètre $2r = 2\cdot 10^{-5}\text{m}$ au contact d'une alvéole pulmonaire sphérique de rayon $R = 1,0\cdot 10^{-4}\text{m}^3$.



Justifier que le sang a le temps de se charger en dioxygène.

Exercice 7 Une solution de l'équation de diffusion. Vérifier que la solution

$$n(x,t) = \frac{A}{\sqrt{t}} e^{-\frac{x^2}{4Dt}}$$

vérifie l'équation de diffusion. Vérifier sur cette solution la relation classique entre les ordres de grandeur. Traduire mathématiquement la conservation du nombre total de particules N_0 et en déduire l'expression de la constante d'intégration A en utilisant $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2} du = \sqrt{\pi}$.

Exercice 8 Une autre solution de l'équation de diffusion. On pose $erf(u) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^u e^{-v^2} dv$. Montrer que la solution

$$n(x,t) = n_0 \left[1 - erf\left(\sqrt{\frac{x^2}{4Dt}} \right) \right]$$

vérifie l'équation de diffusion lorsque $t > 0$. Donner l'évolution du profil de répartition au cours du temps, et décrire le phénomène correspondant à ce type de diffusion. On donne $\int_0^{+\infty} e^{-u^2} du = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Exercice 9 Diffusion avec création proportionnelle. On suppose que l'équation de diffusion comporte un terme de création proportionnelle à la densité de particules :

$$\frac{\partial n}{\partial t} = D \frac{\partial^2 n}{\partial x^2} + k \cdot n$$

On se place dans un cylindre de section S, de longueur L et d'axe de révolution (O, x) et on étudie la diffusion unidirectionnelle selon cet axe. Aux extrémités de ce cylindre, les particules sont éjectées, ce qui assure les conditions aux limites $n(0,t) = n(L,t) = 0$. On cherche une solution du type $n(x,t) = \nu(x) e^{\beta x}$.

1. Quelles sont les CL pour ν ?
2. Déterminer l'équation différentielle du second ordre vérifiée par ν.
3. Montrer qu'elle n'admet de solution non triviale que si $k > \beta$.
4. Montrer dans ce cas que la position relative de k et d'un terme $\varphi(D, L)$ donne trois scénarii possibles. Commenter.

Exercice 10 Diffusion avec fuite latérale. Un gaz diffuse le long d'un cylindre de rayon R, d'axe (O, x) et de longueur $L \gg R$, entouré sur sa paroi latérale d'une fine couche d'épaisseur $e \ll R$, faite d'un matériau différent. On note D et D' les coefficients de diffusion du cylindre central (l'âme) et de la gaine ; on suppose que $D' \ll D$.

1. Justifier qu'on peut considérer que $n(x, r, t) = n(x, t)$.
2. Établir l'équation aux dérivées partielles vérifiée par $n(x, t)$ en tenant compte des approximations sugéérées par l'énoncé.
3. Déterminer la solution stationnaire de cette équation en prenant comme CL $n(0, t) = n_0$ et $n(L, t) = 0$. Étudier les cas particuliers $L \to +\infty$ et $D' \to 0$.

Diffusion thermique

Exercice 11 Diffusion à deux sens. Deux récipients de même volume contiennent deux gaz purs distincts A et B (par exemple H_2 et He). Ils sont reliés par un tube de section S et de longueur L rempli d'une substance poreuse à travers laquelle les deux gaz diffusent sans se gêner l'un l'autre, avec un coefficient de diffusion égal $D_1 = D_2 = D$. On admet que le régime est quasistationnaire dans le tube et que les concentrations n_{1A}, n_{2A}, n_{1B}, n_{2B}, (de A (resp. B) dans le récipient 1 (resp. B)) sont uniformes dans les récipients. Les conditions initiales sont $n_{1A}(0) = n_{2B}(0) = n_0$ et $n_{1B}(0) = n_{2A}(0) = 0$. On pourra noter $n_A(x,t)$ et $n_B(x,t)$ les fonctions spatiotemporelles de densité particulaire dans le tube où $x = 0$ correspond au récipient 1 et $x = L$ au récipient 2.

1. Le régime quasi-stationnaire revient à supposer que la dérivée temporelle de n est négligeable devant $D\Delta n$ mais à considérer que les CL, elles, sont variables dans le temps. Résoudre dans ce cas l'équation de diffusion dans le tube et exprimer $n_1(x,t)$ et $n_2(x,t)$ en fonction de $n_{1A}(t)$, $n_{2A}(t)$, $n_{1B}(t)$ et $n_{2B}(t)$.

2. En déduire les lois d'évolution de n_{1A} et de n_{2B}.
3. Calculer l'ordre de grandeur du temps caractéristique en prenant $V = 1,0$ L, $S = 1,0\text{cm}^2$, $L = 10\text{cm}$ et $D = 1,7 \cdot 10^{-5}\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$.

Exercice 12 Diffusion et sédimentation : une formule dûe à Albert Einstein. On assimile des poussières à des sphères de rayon $r = 1\mu\text{m}$ de masse volumique $\mu = 1,2 \cdot 10^{-3}\text{kg} \cdot \text{m}^3$ en suspension dans l'air de masse volumique $\mu_0 = 1,0 \cdot 10^3\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$ et de viscosité $\eta = 1,0 \cdot 10^{-3}\text{kg} \cdot \text{m}^{-1}\text{s}^{-1}$. Au bout d'un temps très bref τ, les molécules acquièrent une vitesse de chute constante v.

1. Calculer numériquement τ et v.
2. Calculer le nombre de Reynolds et commenter.
3. Montrer l'existence d'un flux de particules $\overrightarrow{j}_S$ dit "de sédimentation" (associé à la chute gravitationnelle des particules) qu'on exprimera en fonction de la densité particulaire $n(z)$.
4. Cette densité particulaire provoque un flux diffusif de particules $\overrightarrow{j}_D$ de coefficient D ; donner son expression.
5. En régime permanent, justifier que $\overrightarrow{j}_S + \overrightarrow{j}_D = \overrightarrow{0}$. En déduire qu'on peut écrire $n(z) = n_0 e^{-\frac{z}{h}}$ où on donnera l'expression de h.
6. Le **facteur de Boltzmann** est un coefficient de distribution statistique du type

$$\mathcal{B} = e^{-\frac{\mathcal{E}}{k_B T}}$$

où $\mathcal{E}$ est une énergie caractéristique des objets considérés et $k_B T$ l'ordre de grandeur de l'énergie thermique. En déduire la formule dûe à Einstein : $D = \frac{k_B T}{6\pi r \eta}$.

7. Sur quel problème (en rapport avec le sujet) Einstein travaillait-il lorsqu'il découvrit cette formule ?

Exercice 13 Questions qualitatives.

1. Pourquoi, au début de l'été, l'eau des lacs est-elle plus chaude en surface et plus froide en profondeur ?
2. Dans quelle mesure un feu dans une cheminée réchauffe-t-il l'air dans la pièce par les trois modes de transfert thermique ?
3. La croûte lunaire est constituée d'un empilement compact de grains sphériques. Par quel(s) mode(s) la chaleur peut-elle atteindre les couches inférieures ?

Exercice 14 Chauffage d'une pièce. L'air d'une pièce calorifugée et étanche de volume $V = 30\text{m}^3$ est assimilé à un gaz parfait diatomique de température initiale $T_0 = 280\text{K}$ sous la pression atmosphérique normale $P_0 = 101300\text{Pa}$. Une source de chaleur de puissance $\mathcal{P} = 1500$ W est mise en marche à $t = 0$. À quelle date la température atteindra-t-elle $T_f = 300\text{K}$?

Exercice 15 Rendement thermique du rayonnement solaire. Le Soleil émet un rayonnement électromagnétique estimé à $\mathcal{P}_S = 3,8 \cdot 10^{26}$ W. La Terre se trouve à $r_T = 0,15 \cdot 10^{12}\text{m}$ et Pluton à $r_P = 5,9 \cdot 10^{12}\text{m}$.

1. Quelle est la forme du champ de vecteurs densité de courant éenergétique du rayonnement solaire ?
2. Quelle est la norme de ce courant à la surface de la Terre et à la surface de Pluton ?
3. Ce courant ne peut être totalement assimilé à un courant thermique ?
4. Quel est le type de rayonnement EM qui constitue l'essentiel du rayonnement thermique ?
5. En plein été, aux heures les plus chaudes du jour, l'eau d'une piscine d'enfant, de surface 1m^2 et de hauteur 10cm peut voir sa température s'élever de $2°C$ en une heure ; la capacité calorifique massique de l'eau est $c = 4180\text{J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$ (une calorie) ; donner un ordre de grandeur de la fraction du rayonnement EM absorbée par l'eau de la piscine.

Exercice 16 Dimensionnement d'une source de chaleur. Une pièce parallélépipédique est parfaitement calorifugée sauf le long d'un mur donnant sur l'extérieur, d'épaisseur $e = 0,10\text{m}$, de surface $S = 10\text{m}^2$, formé d'un matériau de conductivité thermique $\lambda = 10\text{W} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{m}^{-1}$. La température dans la pièce est $\theta_P = 20°C$, la température extérieure $\theta_e = -10°C$. On néglige tout autre transfert thermique que la conduction. Une source de chaleur est chargée de maintenir constante la température de l'air dans la pièce. Le régime est stationnaire et on néglige les effets de bord (la température ne dépend que de l'abscisse). Montrer que le profil de température dans le mur est une fonction affine de l'abscisse. Calculer la puissance thermique de la source de chaleur.

Exercice 17 Emballement d'un réacteur thermique. Dans un milieu réactionnel, l'augmentation de température augmente la vitesse de réaction d'une réaction chimique exothermique. On modélise ce phénomène en introduisant un terme de production interne de chaleur proportionnel à la température absolue, homogène à une puissance volumique : $\frac{d\mathcal{P}_i}{d\tau} = kT$. On suppose que le mélange réactionnel est maintenu dans un ballon sphérique, que le champ de températures est à symétrie radiale et que les transferts thermiques sont purement conductifs et radiaux. On note c la capacité thermique massique du mélange, μ sa masse volumique et λ le coefficient de conductivité thermique. Établir l'équation de la chaleur vérifiée par $T(r,t)$.

Exercice 18 Associations de résistors.

1. Donner le schéma thermique équivalent à l'association série de deux résistors.
2. Donner le schéma thermique équivalent à l'association parallèle de deux résistors.
3. Reprendre l'exercice 6 et déterminer l'épaisseur d'isolant de conductivité $\lambda' = 0,1\text{W} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{m}^{-1}$ qu'il faut apposer contre le mur pour ramener la puissance de la source à 3000W ?

Exercice 19 Tour cylindrique.

1. Préliminaire : **résistance thermique cylindrique**. On considère une paroi cylindrique homogène, de conductivité thermique λ, de hauteur H, de rayons intérieur r_i et extérieur r_e. Les températures T_i sur la paroi intérieure et T_e sur la paroi extérieure sont uniformes. Déterminer l'expression de la résistance thermique dans l'hypothèse du régime stationnaire et d'une conduction thermique purement radiale.
2. Même question pour une paroi sphérique.
3. Un bâtiment est formé d'une tour cylindrique en parpaings ($\lambda_1 = 1\text{W} \cdot \text{K}^{-1}\text{m}^{-1}$), de rayon intérieur $R = 10\text{m}$, de hauteur $H = 5\text{m}$ et d'épaisseur $e = 0,2\text{m}$, d'un toit cylindrique et d'une dalle de sol en ciment ($\lambda_2 = 10\text{W} \cdot \text{K}^{-1}\text{m}^{-1}$) d'épaisseur égale $e = 0,2\text{m}$. La dalle est revêtue d'une moquette ($\lambda = 0,05\text{W} \cdot \text{K}^{-1}\text{m}^{-1}$) d'épaisseur $e' = 0,03\text{m}$ le plafond d'un revêtement de polystyrène ($\lambda = 0,05\text{W} \cdot \text{K}^{-1}\text{m}^{-1}$) d'épaisseur $e' = 0,03\text{m}$. Le sol sous la dalle est à la température $T_S = 280\text{K}$, la température de l'air extérieur $T_e = 270\text{K}$ et de l'air intérieur $T_i = 290\text{K}$. On note $\mathcal{P}$ la puissance du système de chauffage.
   (a) Donner le schéma électrique équivalent de ce système en régime permanent.
   (b) Calculer numériquement toutes les résistances. Pour les murs, on pourra utiliser l'expression de la résistance thermique cylindrique du préliminaire (sinon, cf ex 13).
   (c) Par application du théorème de Millman, déterminer la valeur de $\mathcal{P}$.

Exercice 20 Résolution de l'équation de Poisson. Un barreau rectiligne et homogène de conductivité thermique λ de section S, de longueur L, est le siège d'un flux thermique unidirectionnel. On note T_0 la température à une extrémité en $x = 0$ et T_L celle à l'autre extrémité en $x = L$. Il n'y a pas de source interne de chaleur. Résoudre dans ce cas l'équation de Poisson, déterminer le champ de courant thermique et le flux thermique.

Exercice 21 Second principe et conduction thermique. On considère deux solides de même capacité calorifique C, de très grande conductivité thermique de telle sorte que leurs températures T_1 et T_2 puissent être considérées comme homogènes. Ils sont totalement calorifugés mais reliés par une tige cylindrique de capacité calorifique négligeable, de conductivité thermique λ, de longueur L et de section S. À la date $t = 0$, les températures initiales sont $T_1(0) = T_{10}$ et $T_2(0) = T_{20}$. On se place en régime quasi-stationnaire et on peut appliquer la loi des résistances thermiques.

1. Déterminer l'expression du flux thermique circulant dans la tige à la date t lorsque les températures sont $T_1(t)$ et $T_2(t)$.
2. Établir les lois d'évolution de $T_1(t)$ et de $T_2(t)$.
3. Déterminer la température finale du système.
4. Déterminer la variation d'entropie de chaque sous-sytème ΔS_1 et ΔS_2 et en déduire la variation d'entropie ΔS du système complet.
5. Vérifier et commenter la positivité de ΔS.

Exercice 22 Pour aller plus loin. On considère un cube de côté $2e$, constitué d'un matériau solide homogène de masse volumique μ, de capacité calorifique massique c, calorifugé sur ses six faces et dont le champ de température initial est $T(x) = T_0\left(1 + \alpha\frac{x}{e}\right)$ avec $x \in [-e, e]$ et $0 < \alpha < 1$. La température s'uniformise à T_0 par transferts conductifs internes. On donne une généralisation du résultat de l'exercice précédent : lorsqu'un corps de capacité thermique C_1 à la température T_1 est mis au contact d'un corps de capacité thermique C_2 à la température T_2, que ceux-ci évoluent de façon adiabatique jusqu'à la température d'équilibre T_e, la variation d'entropie du système est $\Delta S = C_1 \ln\frac{T_e}{T_1} + C_2 \ln\frac{T_e}{T_2}$. Calculer la variation d'entropie du cube entre l'état initial et l'état d'équilibre et donner son expression lorsque $\alpha \ll 1$.

Exercice 23 Principe du chauffage central. Une canalisation cylindrique de rayon intérieur r, de rayon extérieur $r + e$, de longueur ℓ et de conductivité thermique λ, est traversée par un fluide de capacité thermique massique c et de masse volumique μ. On note D_m le débit massique et on se place dans le régime quasi stationnaire. La canalisation est plongée dans une enceinte de température T_0. On note T_i la température d'injection en $x = 0$ et T_e la température d'éjection en $x = \ell$. La température du fluide dans une section de la canalisation est uniforme.

1. Pendant dt, une tranche de fluide d'épaisseur très faible ε passe de l'abscisse x à l'abscisse $x + dx$ (pour le dessin, on pourra considérer que ε est nettement plus petit que dx). Sa température passe alors de $T(x)$ à $T(x + dx)$.
   (a) Donner l'expression de dx en fonction de r, μ, D_m et dt.
   (b) La résistance thermique cylindrique est $R_{th} = \frac{\ln\frac{r+e}{r}}{\lambda 2\pi\varepsilon}$. Montrer que
   $$T_0 - T(x) = \frac{\ln\frac{r+e}{r}}{\lambda 2\pi} D_m c \frac{dT}{dx}$$
   (c) En déduire que $T(x) = T_0 + (T_i - T_0)e^{-\frac{x}{\delta}}$ où on précisera l'expression de δ.
2. Quelle valeur faut-il donner à ℓ pour que la température d'éjection soit égale à T_0 à moins de 1% près ?
3. Donner dans ce cas le flux de chaleur cédé par le fluide.
4. En déduire l'équation différentielle vérifiée par la température de l'air dans l'enceinte $T_0(t)$ en notant C_0 sa capacité thermique.
5. En déduire la variation de T_0 en fonction du temps.

Exercice 24 Croissance d'une couche de glace. La surface d'un lac est gelée, recouverte d'une couche de glace d'épaisseur e. La température de l'air extérieur est $\theta_e = -10°C$, la température de l'eau sous la glace est $\theta_i = 0°C$. On note λ la conductivité thermique de la glace, μ sa masse volumique et ℓ_f sa chaleur latente massique de fusion (opposée à celle de solidification). On raisonne sur une surface S de référence, et on se limite aux transferts conductifs verticaux, dans l'approximation des états quasi stationnaires.

1. Faire un bilan thermique pendant dt en considérant que la chaleur cédée par l'eau liquide à l'air en traversant la couche de glace correspond à la solidification d'une épaisseur de glace supplémentaire de.
2. En déduire l'équation différentielle vérifiée par $e(t)$.
3. En déduire la loi d'évolution $e(t)$ en prenant $e(0) = 0$.

Exercice 25 Théorie des caves. La température de la surface du sol ($z = 0$) exposée au Soleil est, sur une période de quelques jours, assimilable à une fonction sinusoïdale du temps, de valeur moyenne 300K, de période 1 jour et d'amplitude 10K (ou 20K crête-à-crête). On choisit $t = 0$ correspondant au moment de la journée où la température est la plus chaude (16 heures en été). La conductivité thermique du sol est $\lambda = 1\mathrm{W}\cdot\mathrm{K}^{-1}\cdot\mathrm{m}^{-1}$, sa masse volumique $\mu = 1\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^{-3}$, sa capacité thermique massique $c = 4180\mathrm{J}\cdot\mathrm{K}^{-1}\mathrm{kg}^{-1}$. On cherche une expression de la température sous la forme :

$$T(z,t) = T_m + T_a e^{\varepsilon\frac{z}{\delta}} \cos(\omega t - \varepsilon kz + \varphi) \quad \text{avec} \quad \varepsilon = \pm 1$$

1. En se plaçant en $z = 0$, donner les valeurs numériques de T_m, T_a, ω et justifier que $\varphi = 0$.
2. L'axe des z étant orienté vers le haut, donner la valeur de ε. À ce stade, les seules inconnues restantes sont δ et k.
3. Vérifier que l'équation de la chaleur est vérifiée si et seulement si $k = \frac{1}{\delta}$ et $\omega\delta^2 = 2D_Q$.
4. En déduire l'expression et la valeur de δ et exprimer complètement la solution.
5. Pourquoi parle-t-on d'onde de chaleur ? Préciser sa célérité.
6. Donner l'allure des variations de T en fonction de t pour des valeurs de z fixées. Conclure.

Exercice 26 Transferts conducto-convectifs. Le transfert convectif entre un matériau dont la paroi est de surface S à la température T_p et au contact d'un fluide dont la température loin de la paroi est T_∞ est caractérisé par la **loi de Newton** : le flux de chaleur cédée par le matériau au fluide est $\phi = hS(T_p - T_\infty)$.

1. Montrer qu'on peut définir une résistance thermique convective.
2. Une ailette cylindrique de rayon r, de conductivité thermique λ et d'axe (O,z) est reliée à sa base à un thermostat à la température T_0. Elle est au contact de l'air à la température $T_\infty = T_1$. On se place en régime permanent et on suppose que la température est uniforme sur toute section droite de l'ailette : $T(M,t) = T(z)$. En faisant un bilan thermique complet sur la tranche $[z, z+dz]$, établir l'équation différentielle vérifiée par $T(z)$.
3. L'ailette est supposée infinie. Résoudre l'équation et conclure.

Exercice 27 Température au centre de la Terre. On assimile la Terre à une sphère homogène de masse volumique μ, de rayon $R = 6,38{\cdot}10^6\mathrm{m}$, de masse $5,98{\cdot}10^{24}\mathrm{kg}$ et de conductivité thermique λ. La Terre est le siège de désintégration radioactives de puissance volumique $\mathcal{P}_V$. On note $\overrightarrow{j} = j(r)\overrightarrow{u}_r$ le vecteur densité de courant thermique, $T(r)$ la température et on se place en régime permanent.

1. Par un bilan énergétique sur la couche $[r, r+dr]$, établir l'équation vérifiée par $j(r)$.
2. Rappeler la relation entre $j(r)$ et $T(r)$.
3. On mesure aisément le gradient de température à la surface du globe : dans les puits de mine, la température augmente de 30K par km. En déduire $j(r)$ et $T(r)$.
4. Donner l'expression de la température au centre de la Terre et estimer sa valeur numérique.

Exercice 28 Bilan thermique d'un fil conducteur d'électricité. Un conducteur cylindrique d'axe (O,x) a pour longueur L, pour rayon R, sa masse volumique est μ, sa capacité calorifique massique c, sa conductivité thermique λ et sa résistivité électrique ρ.

1. La surface latérale est calorifugée, on impose $T(0,t) = T_1$ et $T(L,t) = T_2$ et le fil est parcouru par un courant d'intensité constante I. On se place en régime permanent. Déterminer $T(x)$.
2. Les extrémités sont calorifugées mais la surface latérale ne l'est plus, au contact de l'air extérieur à la température à l'infini T_0. On rappelle la loi de Newton donnant la puissance échangée par convection par un élément de surface : $h(T - T_0)dS$. On suppose de plus que la résistivité électrique s'exprime par $\rho = \rho_0\left[1 + a(T - T_0)\right]$. Montrer que

$$\mu c\pi R^2 \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda\pi R^2 \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - 2h\pi R(T - T_0) + \rho\frac{I^2}{\pi R^2}$$

   On note $T_m(t) = \frac{1}{L}\int_0^L T(x,t)dx$ et $\theta(t) = T_m(t) - T_0$. Montrer qu'on peut écrire

$$\tau\frac{d\theta}{dt} + \left(1 - \frac{I^2}{I_0^2}\right)(\theta - \theta_\infty) = 0$$

   Discuter la nature de la solution.