

Feuille d'exercices numéro 10

Phénomènes dispersifs

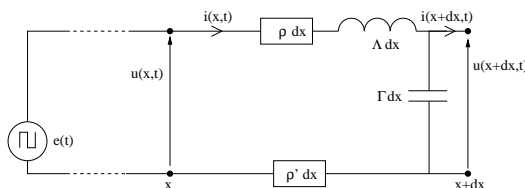
PC, 31 janvier 2009

Phénomènes dispersifs divers et variés

Exercice 1 On considère un fluide visqueux régi par l'équation de Navier-Stokes, dans laquelle on note η la viscosité exprimée en Poiseuille. Établir les équations linéarisées dans l'approximation acoustique. En déduire l'équation de dispersion. Montrer que l'onde acoustique est amortie.

Exercice 2 De \underline{k} à l'EDP. Une onde plane $u(x, t)$ a pour vecteur d'onde complexe $\vec{k} = \underline{k} \vec{u}_x$ avec la relation de dispersion $\underline{k} = \pm \frac{\omega - j\omega_0}{c}$. Établir une équation aux dérivées partielles du second ordre compatible avec cette relation et déterminer les expressions de v_g et v_φ .

Exercice 3 Ligne bifilaire. Un tronçon élémentaire de longueur dx est modélisé par le schéma suivant :



Établir le système d'équations aux dérivées partielles vérifiées par u et i . En déduire la relation de dispersion et décrire qualitativement quelle en est la conséquence sur la propagation du signal de tension rectangulaire émis par le GBF.

Exercice 4 Cornet acoustique. On assimile un tel cornet (*cf.* Professeur Tournesol dans *Objectif Lune*) à une tuyère d'axe de révolution $\Delta = (O, x)$ et de section $S(x) = S_0 e^{-\frac{x}{\delta}}$. On étudie la propagation des ondes sonores dans ce cornet selon l'approximation acoustique en posant

$$P = P_0 + p_1, \quad \mu = \mu_0 + \mu_1 \quad \text{et} \quad \vec{v} = v_0 \vec{u}_x + v_1 \vec{u}_x$$

Établir l'équation linéaire de propagation vérifiée par v_1 , établir l'équation de dispersion et montrer qu'il est possible d'observer une onde amplifiée si ω est supérieure à une pulsation de coupure ω_c dont on précisera l'expression en fonction de μ_0 , χ_S et δ .

Exercice 5 Caténaire. Un câble horizontal, de tension T_E et de masse linéique μ , est suspendu par des câbles caténaux dont l'action se ramène à une force verticale répartie $-\alpha z \cdot dx$.

1. Montrer qu'on peut établir une équation du type

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = \frac{z}{\delta^2}$$

2. Donner l'équation de dispersion et conclure.

Exercice 6 Corde avec frottement. Un câble horizontal, de tension T_E et de masse linéique μ , se déplace dans l'eau, et est soumis à un frottement fluide linéaire de coefficient λ .

1. Donner l'équation aux dérivées partielles vérifiée par l'altitude z .
2. Donner l'équation de dispersion et conclure.

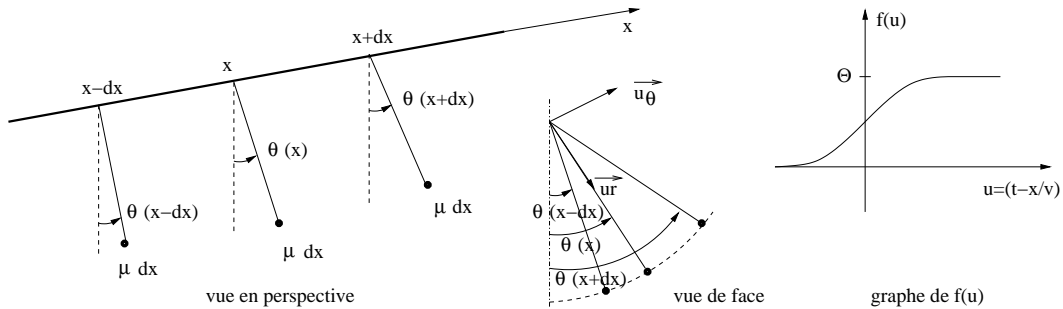
Exercice 7 Corde verticale. Une corde verticale, suspendue par son extrémité A, l'autre extrémité B étant libre, est de longueur L et de masse linéique μ .

1. Établir l'expression de la tension $T(z)$.
2. Établir l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = -g \frac{\partial x}{\partial z} + g(L-z) \frac{\partial^2 x}{\partial z^2}$$

3. Peut-on définir une équation de dispersion ?
4. Pour une corde très longue, on confond $(L-z)$ et L . Justifier que lorsqu'on agite assez vite l'extrémité A, l'amplitude de l'onde augmente vers le bas.

Exercice 8 Corde lestée. Une corde de masse très faible, restant uniformément horizontale selon (O, x) , est lestée par des petites masselottes de masse μdx , situées tous les $a = dx$, pendues au bout de fils de longueur ℓ et formant autant de pendules simples d'angle d'oscillation $\theta(x)$. Chaque tronçon de corde séparant deux lests consécutifs est assimilable à un fil de torsion de constante de raideur de torsion $C = \frac{\Gamma}{dx}$.



1. Établir, sans faire pour l'instant l'hypothèse des petits angles, l'équation aux dérivées partielles vérifiée par θ . On l'écrira sous la forme

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} - \omega_0^2 \theta$$

et on exprimera c et ω_0 en fonction de μ , g , ℓ et Γ .

2. Quels phénomènes physiques particuliers retrouve-t-on
 - quand Γ tend vers zéro ?
 - quand $g = 0$?
3. On fait l'hypothèse des petits angles ; établir l'équation de dispersion et conclure.
4. On ne fait plus l'hypothèse des petits angles et on cherche une solution sous la forme $\theta(x, t) = f(t - \frac{x}{v})$. On suppose de plus que l'onde étudiée est un soliton, c'est-à-dire qu'elle est tend vers une valeur constante quand $t \rightarrow \pm\infty$. Montrer que f vérifie l'équation différentielle non linéaire du premier ordre

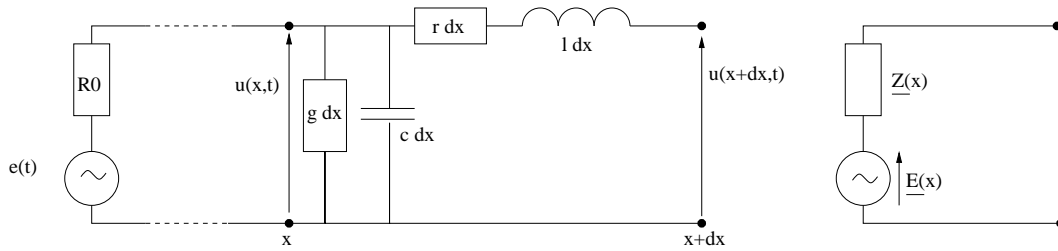
$$\frac{1}{2} \left(1 - \frac{c^2}{v^2} \right) (f')^2 + \omega_0^2 (1 - \cos f) = 0$$

La solution a l'allure indiquée à droite sur le schéma (on pourra éventuellement interroger MAPLE à ce sujet). Commenter l'allure de la courbe, proposer une valeur correspondant à la limite Θ et décrire le soliton.

Exercice 9 Ligne avec pertes La modélisation électrocinétique d'un tronçon de ligne coaxiale, de longueur dx est donnée sur la figure ci-dessous. Le générateur alternatif sinusoïdal délivre une tension

$$e(t) = E_0 \cos(\omega t)$$

En régime sinusoïdal forcé, on note, en formalisme complexe, $\underline{E}(x)$ et $\underline{Z}(x)$ les fém et impédances complexes du générateur de Thévenin équivalent du tronçon compris entre $x = 0$ et x .



On prend l'hypothèse simplificatrice suivante : $\frac{r}{g} = \frac{l}{c} = R_c^2$

1. Établir les équations différentielles vérifiées par $\underline{E}(x)$ et $\underline{Z}(x)$. On effectuera un DL au premier ordre.
2. On choisit $R_0 = R_c$ et on admet que, dans ce cas, la seule solution de l'équation différentielle en \underline{Z} est la solution triviale $\underline{Z}(x) = R_c$. En déduire $\underline{E}(x)$ puis $E(x, t)$.
3. On admet que si on place en bout de ligne un résistor de résistance R_c , il existe une constante λ telle que $u(x, t) = \lambda E(x, t)$. Déterminer la valeur de λ et établir la fonction d'onde de la tension $u(x, t)$. Décrire cette onde et préciser sa "vitesse de phase" v_φ , c'est-à-dire la vitesse à laquelle se propage un extremum quelconque de la fonction sinusoïdale.

Milieux diélectriques

Exercice 10 OEM dans un diélectrique (AN). Dans le modèle de l'électron élastiquement lié, on démontre que $\underline{\chi} = \frac{n_0 e^2}{m_e [\omega_0^2 - \omega^2 + j f \omega]}$. On donne les valeurs numériques : $\omega = 3,141 \cdot 10^{15} \text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$ (correspondant à du jaune de longueur d'onde 600nm), $\omega_0 = 31,41 \cdot 10^{15} \text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$, $f_0 = 1,088 \cdot 10^{18} \text{Hz}$ et $\frac{n_0 e^2}{m_e \omega_0^2} = 13,00$ (sans unité). On a donc $\omega = \frac{\omega_0}{10}$ et $f \omega = 2\sqrt{3}\omega_0^2$

1. Rappeler les hypothèses du dlhi, établir l'expression des équations de Maxwell dans ce cas et en déduire la relation de dispersion.
2. Donner l'expression littérale du complexe $\underline{\chi}$ en partie réelle et partie imaginaire en fonction du rapport $\frac{n_0 e^2}{m_e \omega_0^2}$ et de ω_0 (on pourra négliger un terme), en déduire les valeurs numériques de $\underline{\chi}$, $\underline{\varepsilon}_r$ et \underline{n} .
3. Quelle est la nature de l'OEM qui se propage dans ce milieu ?
4. Déterminer la distance caractéristique δ au bout de laquelle l'amplitude du champ électrique ou du champ magnétique est divisée par e .
5. Quel est le déphasage entre E et B ?

Exercice 11 On donne le coefficient de réflexion en puissance au dioptre entre deux milieux transparents d'indices n_1 et n_2 :

$$R_{1 \rightarrow 2} = \left(\frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} \right)^2$$

1. En déduire l'expression du coefficient de transmission en puissance $T_{1 \rightarrow 2}$ en fonction de n_1 et n_2 .
2. Calculer R et T pour le passage de l'air ($n = 1$) dans l'eau ($n = 1,33$). Qu'en concluez-vous ?
3. Calculer R et T pour le passage de l'air ($n = 1$) dans un rubis spécial où la vitesse de la lumière serait ralentie à un micromètre par seconde. Qu'en concluez-vous ?
4. En vous inspirant des résultats établis dans l'exercice sur l'échographie (chapitre Ondes sonores dans les fluides), déterminer l'indice et l'épaisseur d'une couche anti-reflet adaptée au passage de l'air ($n_1 = 1$) dans le verre ($n_2 = 1,50$).

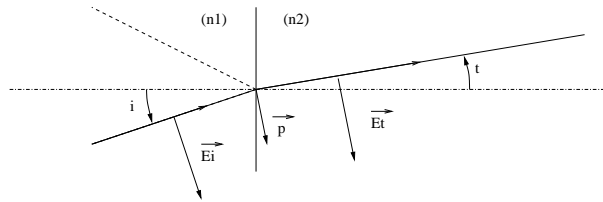
Exercice 12 Polarizabilité de l'eau. On donne pour l'eau la relation $\tau \frac{d\vec{P}}{dt} + \vec{P} = \varepsilon_0 \chi_0 \vec{E}$ avec $\tau = 1,5 \cdot 10^{-10} \text{s}$ et $\chi_0 = 79$ en unité du système international.

1. Proposer un modèle expliquant la relation proposée.
2. Quelle est l'unité de χ_0 ?

- Donner les expressions de χ et de $\underline{n} = n' + jn''$.
- Tracer l'allure des courbes de $n'(\omega)$ et $n''(\omega)$.
- Expliquer pourquoi les fours microondes travaillent à une fréquence de l'ordre de 3GHz.

Exercice 13 Onde évanescente. Une onde électromagnétique plane monochromatique, de vecteur d'onde incident $\vec{k}_i = k_{ix}\vec{u}_x + k_{iy}\vec{u}_y$ et se propageant dans un milieu diélectrique d'indice n_1 , arrive avec un angle d'incidence i sur un dioptre plan ($x = 0$) séparant le milieu d'indice n_1 d'un milieu d'indice n_2 . On note \vec{k}_r et \vec{k}_t les vecteurs d'onde des ondes réfléchi et transmise dans le plan d'incidence (O, x, y). En utilisant l'identité des composantes tangentielles des vecteurs d'onde et la relation de dispersion dans le milieu 2, montrer que dans le cas $n_1 \sin i > n_2$, la loi de Descartes interdit la réfraction alors qu'une onde stationnaire existe pourtant dans le milieu 2. Cette onde dite évanescente peut-elle être détectée ?

Exercice 14 Polarisation par réflexion vitreuse sous incidence de Brewster. On considère une onde plane progressive harmonique se propageant dans un milieu diélectrique d'indice n_1 , et arrivant sur un dioptre délimitant un milieu d'indice n_2 avec un angle d'incidence i . On admet le modèle suivant : l'onde pénètre dans le milieu 2, donne naissance à une onde réfractée faisant un angle t avec la normale, selon la deuxième loi de Descartes. Cette onde réfractée interagit avec les dipôles en surface qui rayonnent une onde réfléchi. L'onde incidente est polarisée rectilignement, le champ électrique est dans le plan d'incidence.



- Justifier que pour un dlhi, le moment dipolaire des dipôles excités par le champ électrique transmis \vec{E}_t sont colinéaires à ce champ.
- Justifier que ce sont des dipôles oscillant harmoniques.
- Rappeler l'expression du champ rayonné dans la base sphérique.
- Dans quelle direction les dipôles ne rayonnent-ils pas ?
- En déduire que contrairement à la loi de Descartes, il n'y a pas d'onde réfléchi lorsque $i + r = \frac{\pi}{2}$ (question subsidiaire : où est l'anomalie dans la démonstration du cours ?)
- En déduire la valeur i_B correspondante (on l'appelle l'incidence de Brewster) en fonction de n_1 et n_2 .
- Faire un schéma avec $n_1 = 1,333$ et $i_2 = 1,667$, en indiquant dans quelle direction il y a absence de rayon réfléchi.
- Pourquoi les élèves de Seconde et les MP/PSI n'observent-ils pas cette absence de rayon réfléchi ?
- Décrire un procédé expérimental d'observation de la polarisation par réflexion vitreuse sous incidence de Brewster.

Électromagnétisme en tous milieux

Exercice 15 Plasma. À très haute température, les constituants d'un gaz monoatomique ou moléculaire ont tendance à s'ioniser. Le modèle le plus simple de **plasma** est celui d'un milieu dilué formé de cations immobiles de charge $+e$ et d'électrons libres de charge $-e$ de masse m_e , sans interaction électrique. On note n_0 le nombre moyen d'électrons ou de cations par unité de volume mésoscopique. Sous l'action d'un champ électrique, les électrons libres sont mis en mouvement et on observe l'établissement d'un courant volumique local.

1. Montrer que dans un plasma, l'existence d'un champ électrique s'accompagne d'un **courant électrique** régi par :

$$(T.C.I.) : m_e \frac{\partial \vec{v}_e}{\partial t} = -e \vec{E} \quad \text{et} \quad \vec{j} = n_0(-e) \vec{v}_e$$

2. On étudie la possibilité de la propagation d'une pseudo-onde plane progressive harmonique dans un plasma ; on note ω la pulsation et $\vec{k} = k \vec{u}_x$ le vecteur d'onde (a priori complexe). Les champs électrique, magnétique, les densités de charge et de courant sont reliés par les six équations :

- les quatre équations de Maxwell ;
- les deux lois reliant \vec{j} , \vec{v}_e et \vec{E}

Traduire ces six équations en formalisme complexe.

3. Par analogie avec les propriétés du métal conducteur, on définit la **conductance complexe du plasma** par :

$$\underline{\gamma} = \frac{n_0 e^2}{j m_e \omega}$$

et en régime sinusoïdal forcé $\vec{j} = \underline{\gamma} \vec{E}$. En déduire la relation de dispersion dans les plasmas reliant l'amplitude complexe du vecteur d'onde \underline{k} et la pulsation ω :

$$\underline{k}^2 = \frac{\omega^2 - \frac{n_0 e^2}{\epsilon_0 m_e}}{c_0^2}$$

4. Le carré de \underline{k} est réel. En déduire l'existence d'une pulsation de coupure ω_c et discuter deux cas selon la position de ω par rapport à ω_c .
5. Dans le cas $\omega > \omega_c$, exprimer les vitesses de groupe et de phase et tracer l'allure de leurs variations. Commenter ces courbes.
6. A.N. : calculer ω_c pour un plasma d'hélium assimilé à un gaz parfait à la pression $P_0 = 1,013 \cdot 10^5$ Pa et à la température $T = 1000$ K.
7. Comparer les notions de distance caractéristique d'amortissement dans un plasma et d'épaisseur de peau dans un bon conducteur.

Exercice 16 OEM dans un métal, dans un plasma. La conductivité du cuivre est $\gamma = 6 \cdot 10^7 S \cdot m^{-1}$. Justifier qu'on peut négliger le courant de déplacement pour des fréquences dont on donnera la borne supérieure, établir l'équation de diffusion vérifiée par \vec{j} , donner la forme générale de la solution et retrouver l'épaisseur de peau. Estimer la puissance calorifique dissipée. Comment évolue le profil de température d'un lingot de cuivre ? Établir l'équation de dispersion dans un plasma neutre de conductivité complexe $\underline{\gamma} = -j\omega_0/\omega$, conclure.

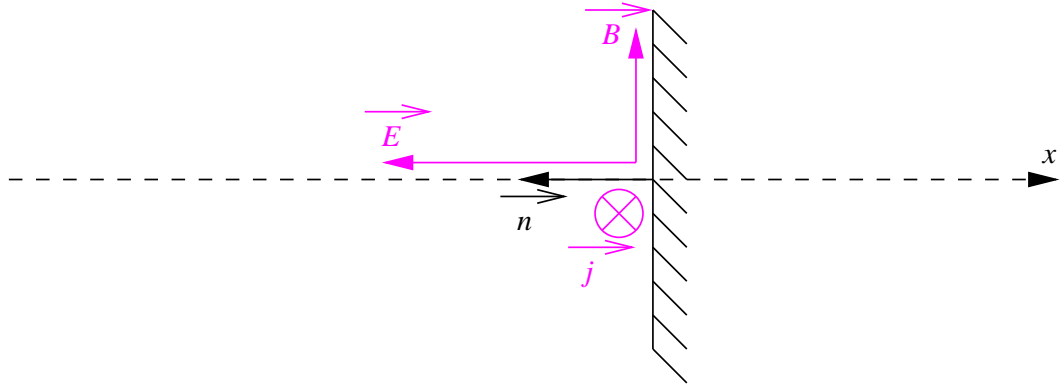
Exercice 17 Réflexion sur un métal conducteur parfait. Un conducteur est dit **parfait** si sa conductivité γ est infinie.

1. Montrer que dans un conducteur parfait :

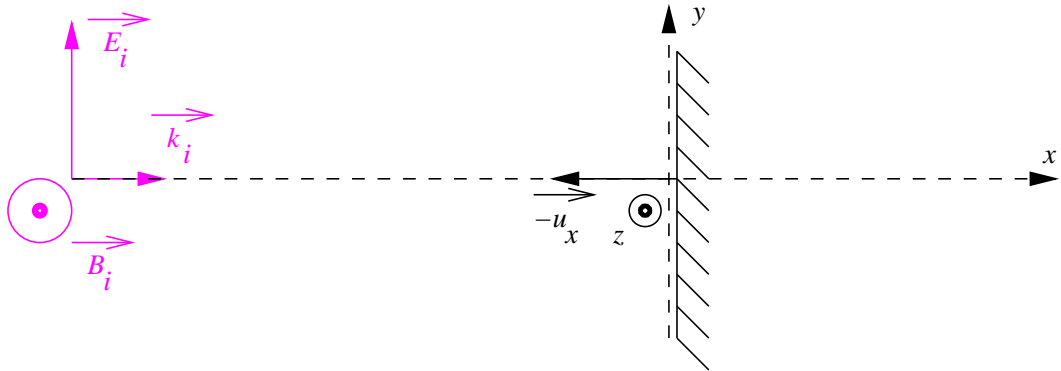
$$\vec{E} = \vec{0}, \quad \vec{B} = \vec{0}, \quad \rho = 0, \quad \vec{j} = \vec{0}$$

2. Les charges et courants ne peuvent donc être non nuls qu'en surface. Les équations de continuité permettent de relier ceux-ci aux champs en surface à l'extérieur du métal. On suppose que le demi-espace $x > 0$ est rempli d'un métal conducteur parfait. Montrer qu'à la surface d'un plan conducteur parfait ($x = 0$), de vecteur normal $\vec{n} = -\vec{u}_x$, les **densités surfaciques** de **charge** ρ et de **courant** \vec{j}_s créent des champs

$$\vec{E}(x = 0^-) = \vec{E}_N = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{n} \quad \text{et} \quad \vec{B}(x = 0^-) = \vec{B}_T = \mu_0 \vec{j}_s \wedge \vec{n}$$



3. On étudie la réflexion sous incidence normale d'une onde électromagnétique incidente, plane progressive harmonique de vecteur d'onde $\vec{k} = k\vec{u}_x$ et de pulsation ω se propageant dans le vide ($x < 0$), sur un plan conducteur parfait en $x = 0$. Pour alléger les notations, on choisit la phase de l'onde incidente $\varphi_i = 0$ en $t = 0$ et $x = 0$, d'où $\vec{E}_i = E_0 \cos(\omega t - kx)\vec{u}_y$ et $\vec{B}_i = \frac{E_0}{c_0} \cos(\omega t - kx)\vec{u}_z$.



Établir que la charge surfacique σ_S est nulle mais pas le courant surfacique \vec{j}_S , donner son expression ainsi que celle des champs caractérisant l'onde réfléchi (\vec{E}_r, \vec{B}_r).

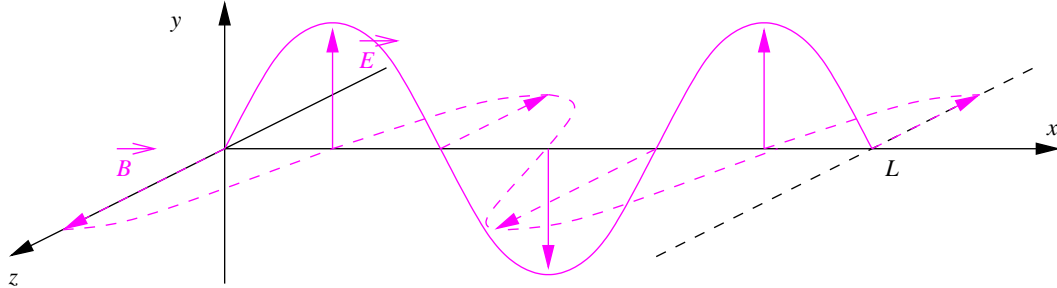
4. A.N. : la paroi plane métallique conductrice parfaite d'une capsule spatiale en orbite autour de la Terre reçoit la lumière du Soleil sous incidence normale. La radiation est émise sous la forme d'une onde sphérique (qu'on pourra supposer monochromatique pour simplifier) depuis la surface du Soleil. On donne la puissance de l'onde émise $\mathcal{P} = 3,82 \cdot 10^{26} \text{W}$ et la distance Soleil-Terre $r_T = 1,55 \cdot 10^{11} \text{m}$. Déterminer l'amplitude de la densité de courant surfacique engendré par la réflexion de la lumière sur la paroi. Ce courant génère-t-il de la chaleur par effet Joule?
5. On se place entre deux plans conducteurs en $x = 0$ et $x = L$.



On cherche une onde stationnaire du type :

$$\begin{cases} \vec{E} = E_0 \cos(\omega t - \varphi_E) \cos(kx - \psi_E) \vec{u}_y \\ \vec{B} = B_0 \cos(\omega t - \varphi_B) \cos(kx - \psi_B) \vec{u}_z \end{cases}$$

Préciser les conditions aux limites, montrer qu'un régime d'ondes planes stationnaires peut s'établir et que le vecteur d'onde et la pulsation sont alors **quantifiés**. Vérifier que la figure suivante est cohérente avec ces résultats :



Commenter.

6. On étudie la propagation d'une onde plane deux plans, de direction de propagation **parallèle** aux plans. On considère la propagation d'une onde électromagnétique monochromatique entre deux plans conducteurs parfaits $z = 0$ et $z = a$. On cherche une solution onde plane dont la structure est

$$\vec{E} \begin{vmatrix} 0 \\ E(z)e^{j(\omega t - kx)} \\ 0 \end{vmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{B} \begin{vmatrix} \underline{B}_x(z)e^{j(\omega t - kx)} \\ \underline{B}_y(z)e^{j(\omega t - kx)} \\ \underline{B}_y(z)e^{j(\omega t - kx)} \end{vmatrix}$$

Montrer qu'une telle onde électromagnétique plane vérifie la condition de quantification :

$$\omega^2 = k^2 c_0^2 + n^2 \frac{\pi^2 c_0^2}{a^2}, \quad n \in \mathbb{N}$$

En déduire que la propagation n'est possible que si $\omega > \omega_c$, où on précisera l'expression de la **pulsation de coupure** ω_c . Établir la relation de dispersion.

7. Un **guide d'ondes infini rectangulaire** est délimité par deux paires de plans infinis conducteurs perpendiculaires entre elles : $y = 0$ et $y = a$ d'une part, $z = 0$ et $z = b$ d'une part. Les quatre conditions aux limites doivent être satisfaites. Le **mode transverse électrique** TE_{10} correspond à une onde se propageant selon \vec{u}_x (TE), dont le champ électrique est non nul selon \vec{u}_y et nul selon \vec{u}_z (10). Étudier ce mode.

Exercice 18 interface vide-métal : propagation guidée. Un câble coaxial est constitué de deux cylindres infinis, métalliques conducteurs parfaits, coaxiaux de rayons respectifs a et b . L'âme (cylindre massif) est parcourue par un courant d'intensité $I(z, t)$ comptée positivement vers le haut, la gaine par un courant opposé. On admet que les symétries du problème permettent de considérer que $\vec{E} = E(r, z, t)\vec{u}_r$. On se place dans le vide en M à la distance r de l'axe avec $r \in]a, b[$.

- Justifier que $\vec{B} = B(r, z, t)\vec{u}_\theta$. Déterminer son expression en fonction de I et de r .
- En déduire l'expression du champ électrique en fonction de dérivées et / ou primitives de I et de r .
- En faisant un bilan de charge sur la surface de l'âme, établir l'équation aux dérivées partielles régissant la fonction $I(z, t)$. En déduire la vitesse de propagation du courant.
- Exprimer le vecteur de Poynting entre les plaques dans le cas où $I(z, t) = I_0 e^{i(\omega t - kz)}$. Préciser la structure de l'onde.

Exercice 19 OEM à l'interface air-eau La surface de la mer est assimilée au plan (O, x, y) horizontal. L'air ($z > 0$) est assimilé au vide, l'eau ($z < 0$) présente une conductivité électrique non nulle $\gamma = 3S \cdot m^{-1}$ et une permittivité diélectrique réelle $\epsilon_r = 80$. On étudie la possibilité d'observer une onde électromagnétique progressive selon (O, x) , harmonique de fréquence $f = 3 \cdot 10^4 \text{Hz}$ et telle que le champ magnétique s'écrit

$$\vec{B}_i = \underline{f}_i(z)e^{j(k_i x - \omega t)}$$

où $i = 1$ correspond à l'air et $i = 2$ à l'eau. On donne $\epsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12} \text{F} \cdot \text{m}^{-1}$.

1. Établir les équations aux dérivées partielles vérifiées par les champs magnétiques dans les deux milieux en justifiant les éventuelles approximations.
2. En déduire les équations différentielles vérifiées par \underline{f}_1 et \underline{f}_2 .
3. Justifier la continuité des composantes tangentielles des champs électriques et magnétiques, en déduire les égalités $k_1 = k_2$ et $\underline{f}_1(0) = \underline{f}_2(0)$ d'autre part.
4. On cherche les solutions sous la forme $\underline{f}_i(z) = \underline{a}_i e^{j\underline{Y}_i z}$. On déduit des équations précédentes, sans difficulté autre que technique que

$$\underline{a}_1 = \underline{a}_2, \quad k \simeq \frac{\omega}{c} \left(1 + j \frac{\varepsilon_0 \omega}{2\gamma} \right), \quad \underline{Y}_1 \simeq (-1 + j) \frac{\varepsilon_0 \omega}{\gamma} \sqrt{\frac{\omega \gamma \mu_0}{2}} \quad \text{et} \quad \underline{Y}_2 \simeq (-1 - j) \sqrt{\frac{\omega \gamma \mu_0}{2}}$$

Interpréter ces résultats.

Exercice 20 Milieu à polarisabilité non linéaire. Un milieu matériel sans charges libres possède une polarisabilité définie par la loi

$$\vec{P} = \varepsilon_0 \left[\chi_0 \vec{E} + \lambda \text{rot} \vec{E} \right]$$

1. Montrer que \vec{E} vérifie l'EDP

$$c^2 \Delta \vec{E} = \varepsilon_e \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} + \lambda \frac{\partial^2 \text{rot} \vec{E}}{\partial t^2}$$

2. On cherche une solution sous la forme

$$\vec{E} = (E_1 \vec{u}_x + E_2 \vec{u}_y) e^{j(\omega t - kz)}$$

- (a) Établir la relation de dispersion.
 - (b) Montrer qu'elle admet deux solutions.
 - (c) Pour chacune de ces deux valeurs, déterminer la valeur de $\frac{E_2}{E_1}$.
3. Une OPPHPR incidente pénètre dans ce milieu en $z = 0$ et en ressort en $z = e$. Quel est son état de polarisation à la sortie?

Exercice 21 Ionosphère. Dans l'atmosphère terrestre, une certaine couche est constituée d'un mélange neutre d'ions positifs et d'électrons libres : on l'appelle l'ionosphère. On note n_0 le nombre d'électrons libres par m^3 et on suppose que le mouvement des ions donne un courant négligeable devant le courant électronique. La vitesse d'un électron libre y vérifie l'équation différentielle

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} + e \left[\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B} + \vec{v} \wedge \vec{B}_0 \right] + \lambda \vec{v} = \vec{0}$$

1. Commenter cette équation.
2. On suppose que (i) l'ionosphère est un milieu peu dense, que (ii) les électrons sont relativement lents et que (iii) $\omega \ll \omega_c = \frac{evB_0}{m}$. Montrer qu'on peut négliger trois termes dans l'équation. On garde pour la suite l'équation simplifiée.
3. Montrer que la densité volumique de courant est définie par

$$n_0 e \vec{E} = \vec{j} \wedge \vec{B}_0$$

4. On cherche une onde électromagnétique de vecteur d'onde \vec{k} et de pulsation ω .
 - (a) Montrer qu'on peut écrire $\vec{k} \wedge \vec{E} = \omega \vec{B}$ et que $-j \vec{k} \wedge \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$.
 - (b) On prend $\vec{k} = k \vec{u}_z$, $\vec{B}_0 = B_0 \vec{u}_z$ et $\vec{E} = E_1 \vec{u}_x + E_2 \vec{u}_y$. Montrer que $\frac{E_2}{E_1} = \pm j$.
 - (c) Montrer que une seule de ces valeurs correspond à une onde progressive.
 - (d) En déduire ce qui peut se passer quand une OPPHPR arrive sur l'ionosphère.