

Feuille d'exercices numéro 4

Mécanique des fluides

PC, 9 octobre 2008

Tuyères et canalisations

Exercice 1 Tuyères.

1. On assimile une tuyère à une canalisation possédant une symétrie de révolution autour de l'axe (O, z) , dont le rayon varie selon la loi

$$r = r_0 \left(1 + \frac{z}{L}\right) \quad \text{avec} \quad L \gg r_0$$

Un fluide incompressible circule dans cette tuyère avec un débit massique constant D_m . On suppose que le champ des vitesses est uniforme et pratiquement longitudinal sur toute section droite de la tuyère : $\vec{v}(M) = \vec{v}(z) = v(z)\vec{u}_z$. Déterminer la topographie du champ des vitesses, les accélérations particulière, locale et convective, et préciser la ou les catégories au(x)quelle(s) appartient cet écoulement.

2. Dans la tuyère décrite à la question précédente, on ne suppose plus que $L \gg r_0$. Un fluide incompressible de masse volumique μ circule dans cette tuyère avec un débit massique constant D_m . On suppose que le champ des vitesses est uniforme et du type

$$\vec{v}(M) = \vec{v}(z) = v_z(z)\vec{u}_z + v_r(z)\frac{r}{z+L}\vec{u}_r$$

Déterminer l'expression de $v_z(z)$ compatible avec les hypothèses et dresser la cartographie du champ des vitesses ; préciser la ou les catégories au(x)quelle(s) appartient cet écoulement.

3. Une tuyère déformable possédant une symétrie de révolution autour de l'axe (O, z) a une section qui dépend de z et de t : $S(z, t)$ (c'est par exemple le cas pour un tube de dentifrice sur lequel on appuie). Un fluide y circule et on admet pour simplifier que le champ des vitesses est uniforme et pratiquement longitudinal sur toute section droite de la tuyère : $\vec{v}(M, t) = \vec{v}(z, t) = v(z, t)\vec{u}_z$. Établir l'équation aux dérivées partielles reliant les trois variables

$$\frac{\partial \mu S}{\partial t} + \frac{\partial \mu v S}{\partial z} = 0$$

On pourra faire un bilan sur la tranche de fluide entre z et $z + dz$ entre t et $t + dt$.

Exercice 2 Canalisations.

1. Un fluide incompressible circule dans une canalisation horizontale, cylindrique d'axe (O, z) et de section S . Le débit massique D_m est constant et on se place en régime stationnaire. Les champs eulériens sont supposés uniformes sur toute section droite de l'écoulement. Établir la relation liant le champ des pressions et celui des vitesses.
2. Dans l'exercice précédent, on suppose que le fluide est un gaz parfait de masse molaire M et que l'écoulement est isotherme à la température T . Déterminer complètement l'expression de $v(z)$ en posant $P(0) = P_0$.

- Un gaz parfait circule de bas en haut d'une canalisation cylindrique d'axe (O, z) et de section S . Le débit massique D_m est constant et on se place en régime stationnaire. Les champs eulériens sont supposés uniformes sur toute section droite de l'écoulement. Déterminer $v(z)$ en écoulement isotherme à la température $T = T_0$; donner dans ce cas l'allure du profil des vitesses en fonction de z . Déterminer de même la relation entre $v(z)$ et z dans le cas d'un écoulement adiabatique réversible (on notera $\gamma = \frac{C_{P,m}}{C_{V,m}}$).
- Un fluide incompressible circule dans une canalisation horizontale, cylindrique d'axe (O, z) et de section S . Le débit massique D_m varie lentement selon la loi $D_m = D_0 \left(1 + \frac{t}{\tau}\right)$. Les champs eulériens sont supposés uniformes sur toute section droite de l'écoulement. On pose $P(0) = P_0$ et $v(-0, t) = v_0$. Établir la relation liant le champ des pressions et celui des vitesses en justifiant les approximations effectuées.

Exercice 3 Tornado. Une zone dépressionnaire a la forme d'un disque de rayon $R = 1000\text{km}$ à la surface du sol de la Terre (dont on néglige la rotondité sur ce disque) centré en un point de latitude $\lambda = \frac{\pi}{4}$. On suppose que la pression évolue de façon affine le long d'un rayon du disque, de $P_0 - \delta P = 99\,300\text{Pa}$ au centre à $P_0 = 101300\text{Pa}$ à la périphérie. L'air est assimilé à un fluide incompressible de masse volumique $\mu = 1,30\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$, on donne $g = 9,81\text{m} \cdot \text{s}^{-2}$ et la période de révolution de la Terre dans le référentiel géocentrique $T_0 = 86164\text{s}$ (jour sidéral). On n'étudie que les vents horizontaux dans le disque; déterminer le champ des vitesses en régime stationnaire.

Fluides visqueux

Exercice 4 Écoulement de Couette plan. On considère l'écoulement incompressible d'un fluide visqueux entre deux plaques planes horizontales infinies. La première plaque ($z = 0$) est immobile, la seconde ($z = L$) est animée d'une translation horizontale à la vitesse constante $\vec{U} = U\vec{u}_x$. En régime permanent, on note $p(z)$ le champ des pressions et $\vec{v} = v(z)\vec{u}_x$ le champ des vitesses dans le fluide.

- En utilisant l'équation de Navier-Stokes, déterminer $v(z)$.
- En déduire la composante horizontale de la force exercée par le fluide sur une surface S de la plaque mobile.
- Quelle application de ce phénomène connaissez-vous?

Exercice 5 Écoulement de Poiseuille cylindrique. La circulation sanguine dans une artère est modélisée par un écoulement incompressible et permanent d'un fluide visqueux (μ et ν) dans une conduite cylindrique d'axe (O, z) , de longueur L et de rayon R . En raison des symétries du problème, on cherche en coordonnées cylindriques un champ de vitesses et un champ de pressions de la forme $\vec{v}(M) = v(r, z)\vec{u}_z$ et $p(M) = p(r, z)$. On donne pour ce champ $\text{div } \vec{v} = \frac{\partial v}{\partial z}$ et $\Delta \vec{v} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v}{\partial r} \right) \vec{u}_z$.

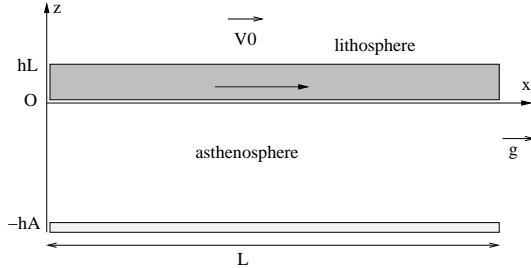
- Montrer que la vitesse ne dépend pas de z .
- On néglige les effets de la pesanteur, l'équation de Navier Stokes s'écrit alors $\mu \vec{a} = -\vec{\text{grad}} p + \eta \Delta \vec{v}$.
 - Montrer que le champ des accélérations est nul.
 - Montrer que la pression ne dépend pas de r .
 - Montrer que $\frac{dp}{dz}$ est une constante C .
 - On note $p(z = 0) = p_1$ et $p(z = L) = p_2$ les pressions aux extrémités de la conduite. Donner l'expression de C en fonction de p_1, p_2 et L .
 - Donner l'expression du champ des vitesses en fonction de C, η et r .
 - Donner l'expression du débit volumique D en fonction de p_1, p_2, L, η et R .
- Chez un adulte, le débit volumique moyen dans l'aorte ($R = 0,5\text{cm}$ et $L = 1\text{m}$) est $D = 80\text{cm}^3 \cdot \text{s}^{-1}$. Sachant que la viscosité du sang est $\eta = 4 \cdot 10^{-3} P\ell$, calculer la chute de pression $p_1 - p_2$ dans l'aorte. Comparer à la différence de pression maintenue par le cœur, de l'ordre de $10\,500\text{Pa}$.

Exercice 6 Forces de traînée.

- Une bille ($m = 0,900\text{g}$, $r = 3,00\text{mm}$) est lâchée sans vitesse initiale dans une colonne de glycérol ($\mu = 1260\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$, $\eta = 1,60\text{Pl}$). Après un bref régime transitoire, la bille atteint une vitesse limite $v_{lim} = 82,0\text{mm} \cdot \text{s}^{-1}$.
 - On modélise les frottements fluides par une force du type $\vec{f} = -\alpha \vec{v}$. Justifier.
 - Déterminer la loi d'évolution de la vitesse v de la bille, tracer son allure.
 - En déduire la valeur numérique de α et comparer à l'expression théorique.
 - Calculer la durée caractéristique du régime transitoire.
- Une bille ($m = 0,900\text{g}$, $r = 3,00\text{mm}$) est lâchée sans vitesse initiale dans une colonne d'eau ($\mu = 1000\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$, $\eta = 1,0 \cdot 10^{-3}\text{Pl}$). Après un bref régime transitoire, la bille atteint une vitesse limite $v_{lim} = 74,0\text{cm} \cdot \text{s}^{-1}$.
 - On modélise les frottements fluides par une force du type $\vec{f} = -\beta v \vec{v}$. Justifier.
 - Déterminer la loi d'évolution de la vitesse v de la bille, tracer son allure.
 - En déduire la valeur numérique de α et comparer à l'expression théorique.

Exercice 7 Glissement sur fluide visqueux.

La lithosphère, plaque solide d'épaisseur h_L se déplace à la vitesse $\vec{v}_0 = v_0 \vec{u}_x$ sur l'asthénosphère, fluide visqueux d'épaisseur h_A , elle-même limitée par une couche inférieure de roche immobile. Les notations sont celles du schéma suivant. On travaille sur une tranche de longueur L .



- Montrer que $\frac{d^2 v}{dz^2} = 0$ et que $P(z)$ suit une loi hydrostatique.
- Déterminer $v(z)$ dans l'asthénosphère et le débit de liquide à travers une section droite.
- Comment l'équation différentielle serait-elle modifiée si on impose une différence de pression $\Delta P = P(x = 0, z) - P(x = L, z)$ indépendante de la profondeur.

Bernoulli

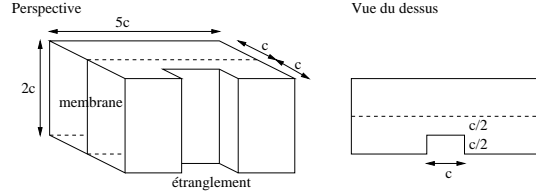
Exercice 8 Vidange d'un réservoir cubique. Un réservoir cubique de côté a est plein d'eau. Un tuyau de vidange horizontal et cylindrique de section $S \ll a^2$ prend naissance à la base du réservoir. La pression atmosphérique P_0 règne au dessus de la surface et à la sortie de la canalisation. Déterminer la durée de vidange du réservoir.

Exercice 9 Vidange et cavitation. Pour vidanger le même réservoir, on installe à sa base un tuyau cylindrique long, de section uniforme et dont l'extrémité débouche à une cote située plus bas de a que le fond du réservoir. On prend $z = 0$ au fond du réservoir ; le haut du réservoir est à la cote $z = a$, l'extrémité du tuyau à la cote $z = -a$. On note v_S la vitesse de sortie du fluide à l'extrémité du tuyau. Déterminer $P(z)$ en distinguant $z > 0$ et $z < 0$ lorsque le niveau d'eau restant dans le réservoir est h .

- Montrer qu'on peut observer un phénomène de cavitation (c'est-à-dire l'apparition d'une bulle de gaz lorsque la pression atteint la pression de vapeur saturante P_S) dans le tuyau.
- Pour remédier à cela, on place à l'extrémité du tuyau une buse réductrice de diamètre, de S à s en sortie. Déterminer s pour éviter le phénomène de cavitation.

Exercice 10 Canalisation écrasée.

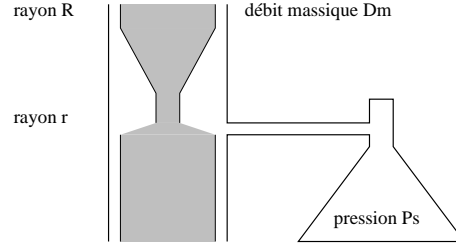
Une canalisation horizontale, de section carrée $2c \times 2c$, de longueur $5c$, est séparée en deux par une membrane de masse négligeable dans le plan vertical.



Dans les canaux ainsi délimités circule un fluide incompressible de masse volumique μ avec le même débit $\frac{D_m}{2}$ et avec la même pression d'injection P_0 . À la suite d'un choc, l'une des deux canalisations présente un étranglement : sa largeur est réduite à $\frac{c}{2}$ en son centre sur une longueur c . Justifier qualitativement que la membrane subira une force. Donner l'expression de cette force.

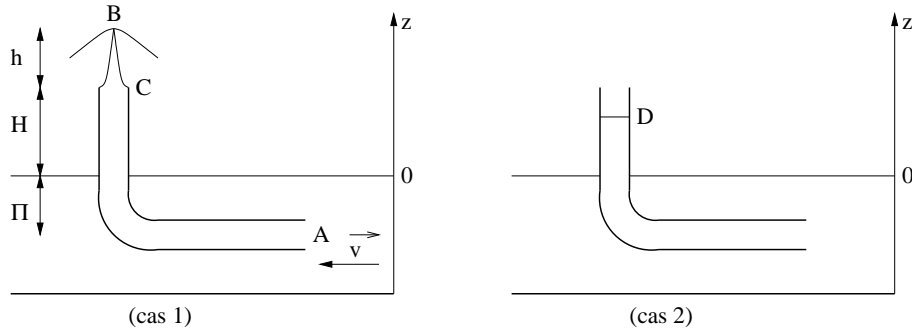
Exercice 11 Trompe à eau.

Une trompe à eau est formée d'une canalisation rigide, de symétrie de révolution, dont le rayon est R à la sortie du robinet (débit massique D_m , pression P_i) et diminue à r au niveau médian; en ce point, l'eau (de masse volumique μ) tombe dans une canalisation de récupération et la cavité est mise en communication avec l'intérieur d'un erlenmeyer (Büchner).



Déterminer le débit de l'eau permettant d'atteindre la pression de vapeur saturante de l'eau P_s dans l'erlenmeyer. On négligera le terme de pesanteur.

Exercice 12 Jet d'eau. La partie horizontale d'un tube coudé est immergée à la profondeur Π dans un courant d'eau uniforme et horizontal de vitesse constante v . Le liquide, parfait et incompressible de masse volumique μ , rentre dans le tube par une section contenant le point A. La section du tube, S , est uniforme entre A et C. Sa partie verticale émerge d'une hauteur H et est percée d'un orifice C. Le champ de pesanteur g est uniforme et la surface libre de l'eau est à la pression atmosphérique P_0 uniforme. Les deux cas possibles sont représentés sur la figure suivante.



A_∞ est un point situé sur la même horizontale que A, très loin en amont de A. Montrer que $P_A = P_0 + \mu g \Pi$.

1. Cas 1.

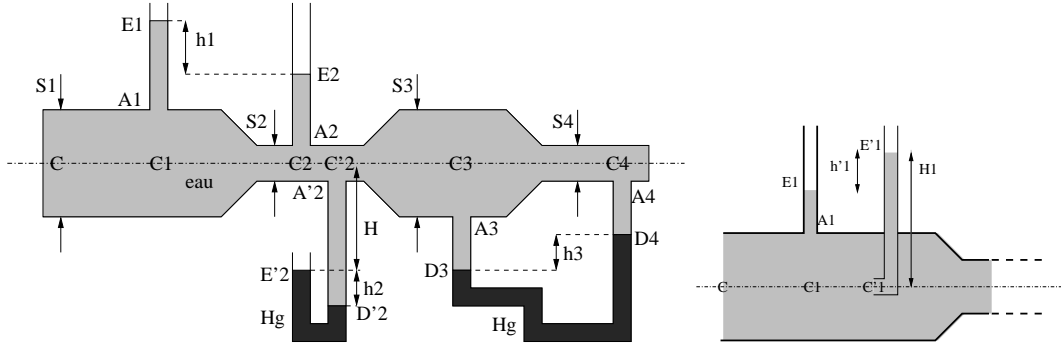
- Montrer que $P(A) = P_0 + \mu g \Pi$.
- En un point du tube de cote z , donner l'expression de la pression $P(z)$.
- Exprimer la hauteur h du jet en fonction de v , g et H .
- En déduire la vitesse minimale v correspondant à ce cas 1.

2. Cas 2.

- Montrer que A est un point d'arrêt.
- Exprimer $P(A)$ en fonction de P_0 , μ , v , g et Π .
- En déduire la cote z_D du point D.

3. A.N. : étudier les cas suivants : ($v = 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, $H = 1 \text{ m}$) et ($v = 3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, $H = 1 \text{ m}$).

Exercice 13 Tube manométrique, tube de Venturi, tube de Pitot On considère les dispositifs suivants.



La pression à l'entrée en C est $P_C = 1,8 \cdot 10^5 \text{ Pa}$, la pression atmosphérique $P_0 = 1,0 \cdot 10^5 \text{ Pa}$. La vitesse dans la section S_i est notée v_i , les sections successives valent $S_1 = 60 \text{ cm}^2$, $S_2 = 10 \text{ cm}^2$, $S_3 = 80 \text{ cm}^2$, $S_4 = 5 \text{ cm}^2$. Les masses volumiques de l'eau et du mercure valent $\mu_e = 1000 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ et $\mu_{Hg} = 13\,600 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$, l'accélération de la pesanteur est $g = 9,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$. On mesure $h_1 = 1,25 \text{ m}$ et $H = 1,00 \text{ m}$.

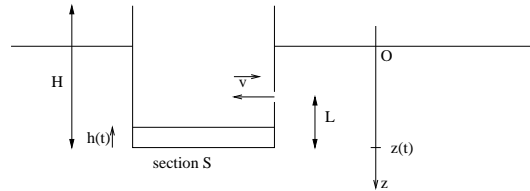
1. Déterminer les expressions littérales des vitesses dans chacune des quatre sections en fonction de g , h_1 , S_1 , S_2 , S_3 et S_4 . Faire les A.N.
2. Déterminer le débit volumique Q en fonction de g , h_1 , S_1 et S_2 . Faire les A.N.
3. Déterminer h_2 puis h_3 (tube de Venturi).
4. On considère enfin le tube de Pitot à point d'arrêt de la figure de droite. Déterminer h'_1 et H_1 .

Exercice 14 Effet Magnus. Un puissant ventilateur produit un écoulement horizontal de l'air, (supposé pratiquement incompressible dans les conditions de l'expérience, de masse volumique μ), homocinétique $\vec{v} = v_0 \vec{u}_x$ et monobare $P = P_0$. Un cylindre de rayon R , de longueur L , de masse m et d'axe horizontal (O, z) est placé dans le souffle d'air. Il est animé d'un mouvement de rotation de vitesse angulaire $\vec{\omega} = -\omega \vec{u}_z$ avec $\omega = \frac{v_0}{R}$. On modélise l'écoulement par la loi suivante où \vec{u}_y est vertical vers le haut $\vec{v} = \vec{v}_0 - \frac{R^2}{r^2} v_0 (\cos \theta \vec{u}_r + \sin \theta \vec{u}_\theta) - \frac{R^2 \omega}{r} \vec{u}_\theta$. Cet écoulement a été étudié dans la précédente feuille d'exercices à laquelle on renvoie pour la structure (superposition du champ uniforme, d'un champ de type doublet hydrodynamique et d'un vortex).

1. Déterminer le champ des vitesses à la surface de la couche limite.
2. Déterminer les points d'arrêt du fluide.
3. Déterminer le champ des pressions à la surface de la couche limite.
4. Déterminer les composantes de la force de pression s'exerçant sur la languette comprise entre θ et $\theta + d\theta$.
5. En déduire par intégration la résultante des forces de pression.
6. Montrer qu'un effet de lévitation est possible.

Exercice 15 Naufrage d'un bateau.

La coque est assimilée à un cylindre droit vertical, fermé en bas, ouvert en haut, de section S , de hauteur H , de masse M ; la coque est percée d'un trou de section s petite devant S , situé à une hauteur L au dessus du fond de la coque; $h(t)$ est la hauteur de l'eau rentrée dans le fond de la coque; $z(t)$ est la profondeur du fond de la coque mesurée depuis la surface de la mer, (O, z) est orienté vers le bas.

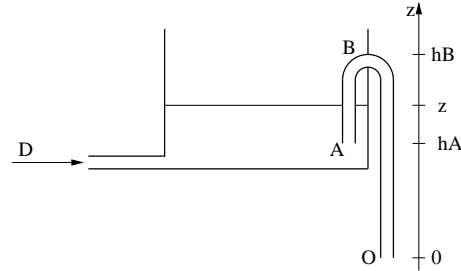


On note μ la masse volumique de l'eau, g l'accélération de la pesanteur et P_0 la pression atmosphérique uniforme.

1. Écrire la condition d'équilibre du bateau en l'absence d'eau.
2. Montrer, lorsque l'eau commence à rentrer, que si on suppose que la vitesse d'enfoncement du bateau reste faible, alors $M + \rho S h(t) = \rho S z(t)$.
3. Déterminer la vitesse d'entrée v de l'eau à la date t .
4. En déduire l'équation différentielle vérifiée par $h(t)$.
5. Déterminer la date à laquelle le niveau de l'eau atteindra l'orifice.

Exercice 16 Vase de Tantale.

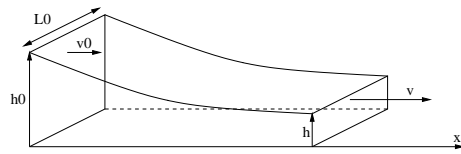
Le vase de tantale est schématisé sur la figure suivante. s est la section du siphon, S celle du réservoir ; le réservoir est alimenté avec un débit volumique constant D . On prend $D = 120\text{cm}^3 \cdot \text{s}^{-1}$, $h_A = 90\text{cm}$, $h_B = 120\text{cm}$, $h_M = 140\text{cm}$, $s = 1\text{cm}^2$, $S = 80\text{cm}^2$ et $g = 9,81\text{m} \cdot \text{s}^{-2}$.



1. On suppose que le siphon est amorcé (plein d'eau). Déterminer la vitesse d'écoulement v_O en O en fonction de z .
2. Établir l'équation différentielle vérifiée par z .
3. Résoudre cette équation quand $D = 0$.
4. Montrer qu'un régime permanent peut s'établir lorsque $D \neq 0$ et donner dans ce cas le niveau d'eau z_p .
5. Montrer que lorsque $D \neq 0$, on peut observer des oscillations.

Exercice 17 Régime fluvial, régime torrentiel.

On considère une voie d'eau en écoulement permanent, de grande largeur L_0 . La hauteur d'eau $h(x)$ varie et la vitesse v est supposée horizontale et uniforme sur une section verticale de la rivière : $\vec{v} = v(x)\vec{u}_x$. On note h_0 et v_0 leurs valeurs en $x = 0$.

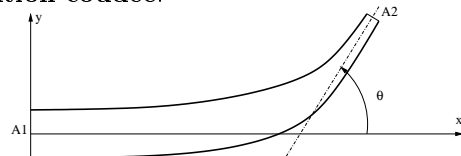


1. Montrer qu'il existe une constante h_s fonction de h_0 et v_0 telle que $h + \frac{v^2}{2g} = h_s$.
2. Exprimer le débit D en fonction de h et des paramètres L_0 , g et h_s .
3. Tracer l'allure de la courbe représentative de D en fonction de h .
4. Le débit D étant fixé, montrer graphiquement que deux valeurs h_1 et h_2 sont possibles pour h . Justifier que l'un des deux s'appelle le régime torrentiel, l'autre le régime fluvial.
5. On suppose que la présence d'un pilier de pont fait passer la largeur de L_0 à $L_0(1 - \varepsilon)$ avec $\varepsilon \ll 1$. Dans ce cas, on peut établir en effectuant le DL que la conservation du débit entraîne une variation de la hauteur doignée par la formule $\Delta h \simeq \frac{\varepsilon h(h_s - h)}{h_s - \frac{3}{2}h}$. Que constate-t-on alors (discuter suivant le type d'écoulement) ?

Bilans

Exercice 18 Force exercée sur une canalisation coude.

Dans le dispositif suivant, la pression en A_1 est P_1 et la section S_1 , la pression en A_2 est P_2 et la section S_2 . On étudie l'écoulement stationnaire d'un fluide homogène, parfait et incompressible de masse volumique μ .



1. Déterminer la relation entre les deux pressions et les deux vitesses.

- Déterminer la relation entre les deux sections et les deux vitesses.
- Déterminer la force exercée par le fluide sur le tuyau. On pourra d'abord déterminer la somme des forces extérieures sur le fluide puis la décomposer.

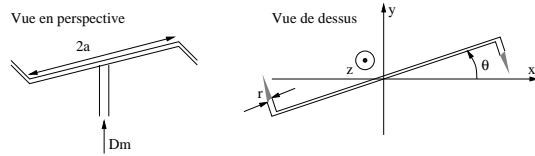
Exercice 19 Force sur une canalisation de section variable. Un gaz parfait de masse molaire M circule dans une canalisation cylindrique horizontale dont le rayon varie brutalement de r_e (entrée) à r_s (sortie). Le débit massique D_m est constant et on se place en régime stationnaire. La pression à l'entrée est P_e , à la sortie P_s . L'écoulement est isotherme à la température T . Déterminer la résultante des forces exercées par le fluide sur la canalisation (on néglige l'influence du poids).

Exercice 20 Bilan thermique. Un gaz parfait de masse molaire M circule dans une canalisation cylindrique de section S . Le débit massique D_m est constant et on se place en régime stationnaire. La pression à l'entrée est aP_0 , à la sortie P_0 . La température d'injection est T_e .

- Déterminer la masse volumique μ_e et la vitesse d'injection \vec{v}_e du gaz à l'entrée.
- Par un bilan de quantité de mouvement, établir l'expression de la vitesse de sortie \vec{v}_s . En déduire T_s et μ_s .
- Par un bilan d'énergie totale, en déduire la quantité de chaleur reçue par le fluide par unité de temps (c'est une puissance thermique). On note $C_{V,m}$ la capacité calorifique molaire supposée indépendante de la température.

Exercice 21 Tourniquet hydraulique.

Le dispositif décrit ci-contre est un tourniquet hydraulique. Un fluide incompressible de masse volumique μ est injecté dans le tuyau vertical avec un débit massique constant D_m . On note r le rayon des buses de sortie. On repère la rotation de la tige par l'angle θ . La pression extérieure est P_0 .



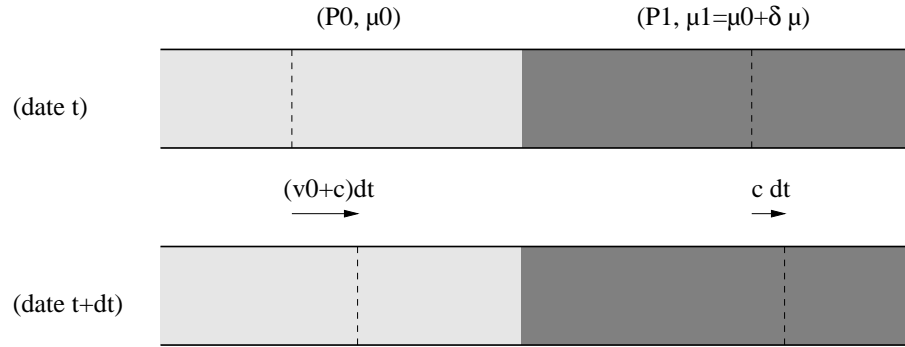
En régime permanent, $\omega = \dot{\theta}$ est constante sous l'action de l'éjection de l'eau et d'un couple de frottement fluide linéaire $\vec{\Gamma} = -\alpha\omega\vec{u}_z$. On cherche à déterminer ω .

- Par composition des vitesses, montrer que la vitesse d'éjection du fluide par la buse de droite est, dans le référentiel galiléen du sol $\vec{v}_D = \left(a\dot{\theta} - \frac{D_m}{2\mu\pi r^2}\right)\vec{u}_\theta$.
- Par application du théorème du moment cinétique en O , en déduire l'expression du moment en O des forces exercées par la canalisation sur le fluide situé dans la tige.
- En déduire ω .

Exercice 22 Onde de choc. Un fluide parfait compressible est initialement en écoulement incompressible uniforme et stationnaire (masse volumique μ_0 , vitesse $\vec{v}_0 = v_0\vec{u}_x$) dans une canalisation horizontale cylindrique infinie, de section S . À la date $t = 0$, on ferme brutalement l'extrémité de la canalisation en $x = 0$ et on étudie le régime transitoire de l'écoulement pour $x < 0$. On étudie un modèle simple dans lequel le fluide est séparé en deux par une surface fictive d'abscisse ξ qui se déplace à vitesse constante $\vec{c} = -c\vec{u}_x$ (c est appelée la célérité de l'onde de choc) avec $c \gg v_0$. À tout instant :

- à gauche de la surface fictive, pour $x \leq \xi$, le fluide se déplace encore à la vitesse $\vec{v} = \vec{v}_0$ et $\mu = \mu_0$, on note P_0 la pression et s_0 l'entropie massique; la perturbation n'est pas encore arrivée;
- à droite de la surface fictive, pour $\xi < x \leq 0$, le fluide s'est immobilisé $\vec{v} = \vec{0}$ et on pose $\mu = \mu_0 + \delta\mu$ avec $\delta\mu \ll \mu_0$, on note P_1 la pression et s_1 l'entropie massique.

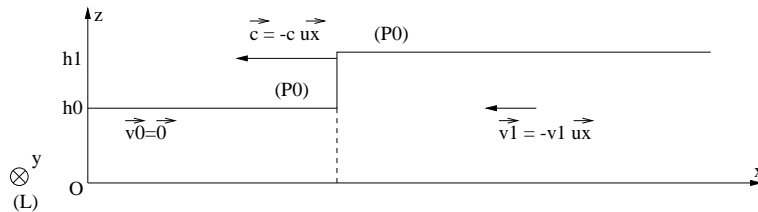
- Faire un schéma dans le référentiel galiléen du laboratoire, \mathcal{R}_0 , faisant apparaître la surface fictive et les différentes vitesses de déplacement.
- On note \mathcal{R}^* le référentiel en translation uniforme par rapport à \mathcal{R}_0 dans lequel la surface fictive est immobile. On travaille sur un système fermé de fluide se répartissant de part et d'autre de la surface. On donne les schémas à la date t et à la date $t + dt$ dans \mathcal{R}^* :



Préciser les vitesses des deux surfaces délimitant le système (indiquées en pointillés sur le schéma) dans \mathcal{R}^* . En déduire les deux distances d'avancement $(v_0 + c)dt$ et $c dt$ indiquées sur le schéma.

- Par un bilan de masse, justifier l'équation (i) $\mu_0 v_0 = c \delta \mu$.
- Par un bilan de quantité de mouvement, justifier l'équation (ii) $(\mu_0 + \delta \mu)c^2 - \mu_0(v_0 + c)^2 = P_0 - P_1$.
- Par un bilan d'entropie, justifier l'équation $(\mu_0 + \delta \mu)S c dt s_1 - \mu_0 S (v_0 + c) dt s_0 = 0$. En déduire que l'écoulement est isentropique.
- On note $\chi_S = \frac{1}{\mu} \left(\frac{\partial \mu}{\partial P} \right)_S$ le coefficient de compressibilité isentropique du fluide, supposé constant et uniforme. En intégrant et en effectuant un développement limité, justifier l'équation (iii) $\delta \mu = \mu_0 \chi_S (P_1 - P_0)$.
- En déduire l'expression de c en fonction de μ_0 et χ_S .
- Combien vaut c dans le cas d'un gaz parfait diatomique ($\gamma \simeq \frac{7}{5}$) de masse molaire $M = 29 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$ à la température $T = 300 \text{ K}$?

Exercice 23 Mascaret. *Cet exercice est donné sans indication de résolution, mais en s'inspirant de la méthode de résolution de l'exercice précédent, on pourra trouver les différents bilans à écrire pour établir les équations.* Un mascaret est une vague séparant deux niveaux d'eau dans un canal. Les notations sont celles du schéma suivant, où l'eau dans le canal a un niveau h_0 à gauche du mascaret où l'eau est immobile ($v_0 = 0$) et un niveau h_1 à droite où l'eau a une vitesse $\vec{v}_1 = -v_1 \vec{u}_x$. On note $\vec{c} = -c \vec{u}_x$ la célérité du mascaret (qui va de droite à gauche). La masse volumique de l'eau (incompressible) est μ , la largeur du canal est L (selon \vec{u}_y).

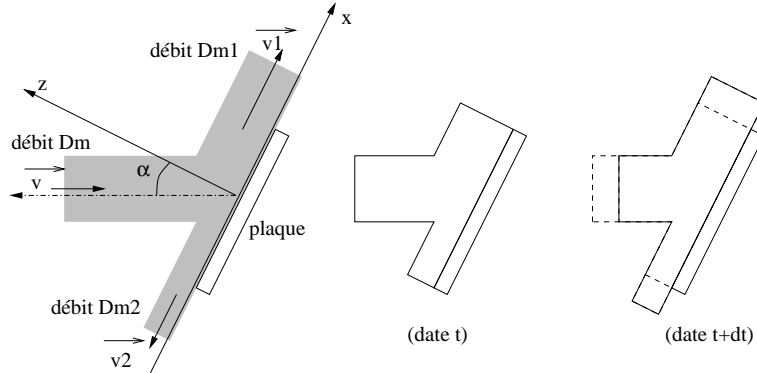


Après avoir défini un système s'étendant de part et d'autre du mascaret, dans un référentiel convenablement choisi, on fera un bilan de masse et un bilan de quantité de mouvement. Pour le calcul des forces de pression, on appliquera la loi de l'hydrostatique et on intégrera $P dS$ sur la paroi. Établir la relation entre h_0 , h_1 , c et v_1 , puis l'expression de c en fonction de g , h_0 , h_1 , P_0 et μ .

Exercice 24 Écoulement isentropique dans une tuyère. Une tuyère est formée d'une canalisation horizontale à symétrie de révolution autour de l'axe (O, x) , dont la section varie selon la loi $S(x)$. On note P_0 la pression à l'entrée de la tuyère en $x = 0$, le fluide qui s'y écoule est assimilé à un gaz parfait de masse molaire M et de rapport de capacités calorifiques noté γ ; on note μ_0 sa masse volumique à l'entrée. L'écoulement est supposé isentropique (donc non visqueux).

1. Établir la loi reliant P , μ , P_0 , μ_0 et γ .
2. Établir l'expression de v en fonction de la pression P .
3. Établir l'expression du débit massique en fonction de la section S et de la pression P .
4. On pose $u = \frac{P}{P_0}$. Montrer qu'on peut écrire le débit massique sous la forme $D_m = Cu^{\frac{1}{\gamma}} \sqrt{1 - u^{1 - \frac{1}{\gamma}}}$. Donner l'expression de la pression de sortie qui rend le débit maximum.
5. Déterminer la vitesse de sortie correspondante. La comparer avec celle obtenue à l'exercice précédent.

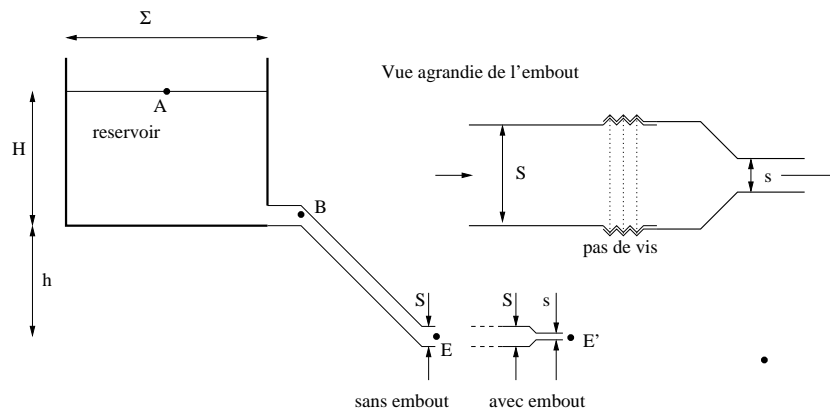
Exercice 25 Résultante des forces sur une plaque. Un jet d'eau (fluide supposé parfait et incompressible) de débit D_m , horizontal est envoyé sur une plaque plane. On négligera l'influence de la pesanteur. Les notations sont celles du schéma suivant.



On se place en régime permanent. On note \vec{F} la force qu'il faut exercer sur la plaque (en plus des forces de pression) pour la maintenir en équilibre.

1. Montrer que $v_1 = v_2 = v$.
2. On travaille sur le système fermé formé de la plaque et de la portion de fluide délimitée par trois sections dessinée sur le schéma.
 - (a) Justifier que la somme des forces de pression est nulle.
 - (b) Justifier que la force \vec{F} est selon \vec{u}_z .
 - (c) Par un bilan de quantité de mouvement, exprimer \vec{F} et indiquer les expressions de D_{m_1} et D_{m_2} en fonction de D_m , v et α .

Exercice 26 Force de pression sur un embout. Un réservoir d'eau (fluide incompressible, de masse volumique μ) de hauteur H , de section Σ est prolongé par une conduite forcée de hauteur h et de section S . La pression atmosphérique extérieure est uniforme égale à P_0 . Les notations sont celles du schéma suivant.

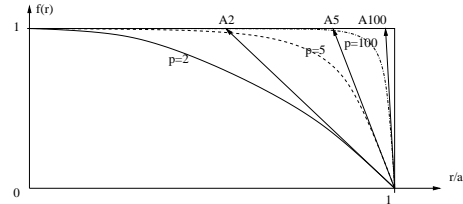


1. On néglige la vitesse de descente du niveau de l'eau dans le réservoir par rapport à celle à la sortie de la canalisation en E . Donner l'expression de la vitesse en E et de la pression en B .
2. On note P_S la pression de vapeur saturante de l'eau à la température de l'expérience. Montrer qu'il est possible de voir apparaître un phénomène de cavitation (ébullition de l'eau dans la canalisation).
3. Pour éviter la cavitation, (et aussi pour mieux maîtriser le jet qu'on envoie sur les augets d'une turbine Pelton par exemple), on visse un embout réducteur de section, de section d'entrée S et de section de sortie s . Déterminer la section s permettant d'éviter la cavitation.
4. Déterminer la force s'exerçant au niveau du pas de vis pour maintenir l'embout en place.

Problèmes divers

Exercice 27 Débitmètre et couche limite.

On modélise l'écoulement d'un fluide dans une canalisation cylindrique de rayon a par le champ des vitesses $\vec{v}(r) = v_0 f(r) \vec{u}_z$ avec $f(r) = 1 - \left(\frac{r}{a}\right)^p$. Le faisceau de courbes représentatives de $f(r)$ pour différentes valeurs de p est représenté ci-contre.

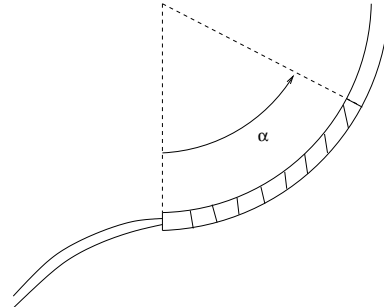


Les points A2, A5 et A100 sont les points d'intersection entre la tangente et l'horizontale $f(r) = 1$.

1. Donner une estimation l'épaisseur de la couche limite δ en fonction de a et de p .
2. La calculer numériquement pour $a = 10\text{cm}$ et respectivement $p = 2$ (écoulement de Poiseuille), $p = 5$, $p = 100$.

Exercice 28 Vidange d'un tuyau en quart de cercle.

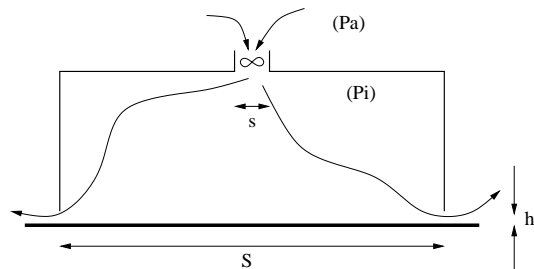
Un tuyau forme un quart de cercle dans le plan vertical, sa section S est constante (le rayon r est négligeable devant R) et il est initialement rempli d'eau. La position du dessus de l'eau restante est repérée par l'angle α . L'eau est incompressible, de masse volumique μ et l'accélération de la pesanteur est notée g . On n'est pas en régime permanent.



Établir l'équation différentielle vérifiée par α par trois méthodes différentes : (a) équation d'Euler (b) théorème du moment cinétique (c) théorème de l'énergie mécanique.

Exercice 29 Hydroglisseur.

Un hydroglisseur est assimilé à un cylindre de rayon $R = 5\text{m}$, de masse $M = 8,0$ tonnes, dont l'extrémité inférieure se maintient à une hauteur $h = 3,0\text{cm}$ au dessus de l'eau parfaitement plate d'un lac. Il glisse sur un coussin d'air assuré par l'aspiration (partie supérieure) d'air atmosphérique à la pression extérieure $P_a = 1,0 \cdot 10^5\text{Pa}$ grâce à un ventilateur de section $s = 1\text{m}^2$, cet air se répartissant à la pression P_i dans la cavité intérieure de section $S = \pi R^2 = 80\text{m}^2$, où on néglige sa vitesse, puis étant expulsé sur le pourtour circulaire de périmètre $L = 2\pi R = 31\text{m}$.



L'air est assimilé à un fluide incompressible non visqueux de masse volumique $\mu = 1,18\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$. On pourra négliger les effets de la pesanteur sur les fluides.

1. Identifier sous quelles actions l'hydroglisseur se maintient en équilibre. En déduire l'expression approchée de P_i .
2. Déterminer la vitesse de sortie v_s et la vitesse d'entrée v_e de l'air.
3. En déduire la puissance du ventilateur et le coût énergétique d'un maintien immobile pendant une heure. Peut-on comparer cette situation avec un hélicoptère?

Exercice 30 Soulèvement du toit d'un hangar Un hangar est héli-cylindrique, de rayon R et de longueur L . L'axe horizontal est (O, x) , l'axe vertical (O, y) , O est le centre du hangar. Il est soumis à l'action du vent dont la vitesse, loin du hangar, est $\vec{v}_0 = v_0 \vec{u}_x$. La pression dans l'intérieur du hangar est P_0 , la même que loin du hangar. On assimile l'air à un fluide parfait en écoulement incompressible et irrotationnel, on néglige les effets de la pesanteur.

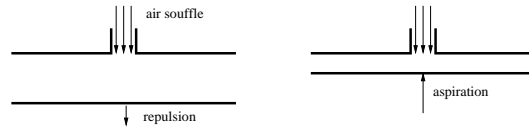
1. Quel est le nom de l'effet qui aura tendance à provoquer le soulèvement du toit du hangar?
2. Montrer que le champ des vitesses dérivant du potentiel $\Phi = \left(\alpha r + \frac{\beta}{r}\right) \cos \theta$ (coordonnées cylindriques) convient, déterminer α et β .
3. Déterminer le champ des pressions à la surface extérieure du hangar.
4. Déterminer la résultante des forces de pression qui s'exercent sur le toit du hangar.

On donne, en coordonnées cylindriques : $\text{grad } U = \begin{pmatrix} \frac{\partial U}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \theta} \\ \frac{\partial U}{\partial z} \end{pmatrix}$, $\text{div } \vec{A} = \frac{1}{r} \frac{\partial r A_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$ et

$$\Delta U = \frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial r} \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 A_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2}.$$

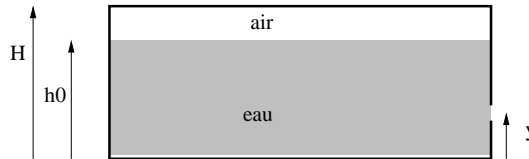
Exercice 31 Explication d'une expérience

Montrer que si la distance entre les plaques est grande, la plaque inférieure est poussée, si la distance est faible, elle peut être aspirée et trouver une position d'équilibre de sustentation (le dispositif est à symétrie cylindrique).



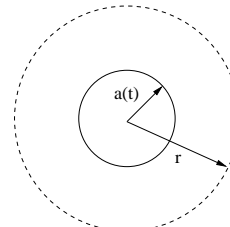
Exercice 32 Vidange

Dans le dispositif suivant, quelle est la hauteur d'eau restant dans le réservoir quand l'eau cesse de couler par l'orifice? L'eau est parfaite incompressible et l'air un gaz parfait à la température T .



Exercice 33 Disparition d'une bulle

Une bulle de vide dans un fluide incompressible est sphérique, de rayon $a(t)$. À la date $t = 0$, $a(0) = a_0$ et $\dot{a} = 0$. Elle est immergée dans un fluide incompressible parfait, on néglige l'effet de la pesanteur. On note μ sa masse volumique et P_0 la pression loin de la bulle.



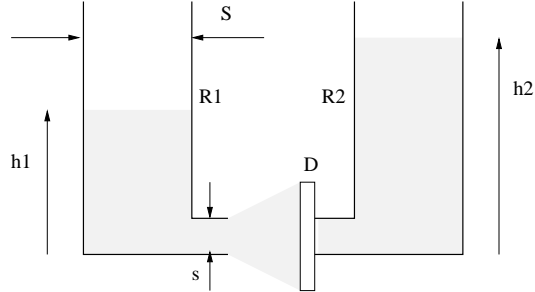
1. On note $D_m(t)$ le débit massique de liquide entrant à la date t à travers une sphère de rayon r concentrique avec la bulle. Justifier que $D_m(t)$ ne dépend pas de r .
2. On note $\vec{v}(r, t) = v(r, t) \vec{u}_r$ le champ radial des vitesses. Donner l'expression de $v(r, t)$ en fonction de r et de $D_m(t)$.
3. En déduire que $D_m(t) = 4\pi a^2 \dot{a}$.
4. Déduire de l'équation d'Euler une relation entre les dérivées de v par rapport à t et r et $\frac{\partial P}{\partial r}$. Écrire cette relation sous la forme d'une équation différentielle en la variable r .
5. En intégrant cette relation entre a et ∞ , en déduire l'équation vérifiée par a

$$a\ddot{a}^2 + \frac{3}{2}\dot{a}^2 + \frac{P_0}{\mu} = 0$$

6. On pose $\dot{a}^2 = f(a)$. Établir l'équation différentielle du premier ordre vérifiée par $f(a)$. Donner sa solution comme somme d'une solution homogène et d'une solution particulière de l'équation sans second membre.
7. En déduire l'expression intégrale de la durée τ de disparition de la bulle. On donne $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^{-3}-1}} = 1,29$. Calculer numériquement τ avec $\mu = 1,0 \cdot 10^3 \text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$, $P_0 = 1,0 \cdot 10^5 \text{Pa}$ et $a_0 = 1 \text{mm}$.

Exercice 34 Maintien d'une plaque en équilibre

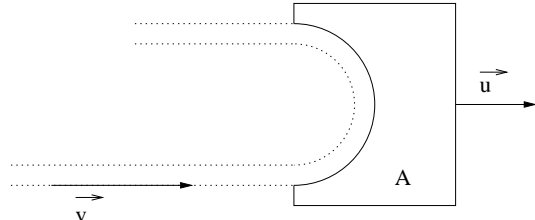
R_1 et R_2 sont symétriques, de section horizontale S et de section de sortie s avec $s \ll S$. L'eau est incompressible, de masse volumique μ . Le disque D , de masse nulle, est en équilibre entre le jet d'eau à gauche sortant de R_1 et à droite la pression statique.



Déterminer la relation entre h_1 et h_2 qui permet de maintenir le disque en équilibre.

Exercice 35 Turbine Pelton

L'auget A se déplace à la vitesse uniforme $\vec{u} = u \vec{u}_x$ dans le référentiel galiléen du sol. Un jet d'eau de section s frappe l'auget avec la vitesse $\vec{v} = V_0 \vec{u}_x$ dans le référentiel galiléen du sol. La forme de l'auget permet de renvoyer le jet à l'opposé.



L'eau est incompressible, de masse volumique μ , on néglige les effets de la pesanteur.

- Calculer la force \vec{f} exercée par le jet d'eau sur l'auget.
 - Par un bilan de quantité de mouvement.
 - Par un bilan d'énergie cinétique.
- Définir le rendement énergétique.
- Déterminer dans quelles conditions le rendement est maximal.