

Feuille d'exercices numéro 9

Ondes électromagnétiques dans le vide

PC, 22 janvier 2008

Généralités

Exercice 1 Applications numériques.

1. Résoudre l'équation de d'Alembert vérifiée par les champs \vec{E} et \vec{B} dans le vide en cherchant, avec le formalisme complexe, les solutions sous la forme d'ondes planes progressives harmoniques. Rappeler la structure de l'onde plane électromagnétique. Une telle onde a pour vecteur d'onde $\vec{k} = k\vec{u}_x$ et pour amplitude de champ électrique $\vec{E}_0 = E_0\vec{u}_y$ avec $E_0 = 100\text{V} \cdot \text{m}^{-1}$ et $k = 1,00 \cdot 10^7 \text{rad} \cdot \text{m}^{-1}$. Déterminer numériquement \vec{B}_0 , \vec{P}_i , λ , σ , ω , f et T .
2. Un laser émet un faisceau de section $S = 1\text{mm}^2$ et de section 10W assimilé à une OPPH monochromatique. Calculer les amplitudes des champs électrique et magnétique.

Exercice 2 Condition d'interférences. Deux OPPH monochromatiques polarisées rectilignement se propagent dans le vide selon \vec{u}_x . On donne, en $x = 0$, $\vec{E}_1(t) = \vec{E}_1 \cos(\omega_1 t)$ et $\vec{E}_2(t) = \vec{E}_2 \cos(\omega_2 t + \theta)$.

1. Calculer les valeurs moyennes des vecteurs de Poynting $\vec{\Pi}_1$ et $\vec{\Pi}_2$ associés à chaque onde.
2. Calculer la valeur moyenne du vecteur de Poynting $\vec{\Pi}$ associé à l'onde résultante.
3. Dans quel cas a-t-on $\langle \vec{\Pi} \rangle \neq \langle \vec{\Pi}_1 \rangle + \langle \vec{\Pi}_2 \rangle$?

Polarisation (analyse)

Exercice 3 Analyse de polarisation. Déterminer l'état de polarisation des ondes suivantes.

$$\begin{array}{ccc} \vec{E}_1 \left| \begin{array}{l} 0 \\ E_0 \cos(\omega t - kx) \\ E_0 \cos(\omega t - kx) \end{array} \right. & \vec{E}_2 \left| \begin{array}{l} 0 \\ E_0 \cos(\omega t - kx) \\ E_0 \sin(\omega t - kx) \end{array} \right. & \vec{E}_3 \left| \begin{array}{l} 0 \\ E_0 \cos(\omega t + kx) \\ E_0 \sin(\omega t + kx) \end{array} \right. \\ \vec{E}_4 \left| \begin{array}{l} 0 \\ E_0 \cos(\omega t - kx) \\ -E_0 \cos(\omega t - kx) \end{array} \right. & \vec{E}_5 \left| \begin{array}{l} 0 \\ E_0 \cos(\omega t - kx + \frac{\pi}{4}) \\ E_0 \sin(\omega t - kx) - \frac{\pi}{4} \end{array} \right. & \vec{E}_6 \left| \begin{array}{l} 0 \\ E_0 \cos(\omega t - kx) \\ 2E_0 \sin(\omega t - kx) \end{array} \right. \\ \vec{E}_7 \left| \begin{array}{l} E_0 \cos(\omega t - ky) \\ 0 \\ -E_0 \sin(\omega t - ky) \end{array} \right. & \vec{E}_8 \left| \begin{array}{l} 0 \\ 2E_0 \cos(\omega t - kx - \frac{\pi}{4}) \\ E_0 \sin(\omega t - kx + \frac{\pi}{3}) \end{array} \right. & \vec{E}_9 \left| \begin{array}{l} 0 \\ E_0 \cos(\omega t + kx + \frac{2\pi}{3}) \\ 2E_0 \sin(\omega t + kx) - \frac{3\pi}{4} \end{array} \right. \end{array}$$

Exercice 4 Décompositions directe et réciproque.

1. Montrer qu'une onde plane progressive harmonique polarisée circulairement est la somme de deux OPPH polarisées rectilignement.
2. Montrer qu'une onde plane progressive harmonique polarisée rectilignement est la somme de deux OPPH polarisées circulairement.

Exercice 5 Aspect énergétique de l'onde plane polarisée circulairement. Une onde plane a pour champ électrique $\vec{E}(z, t) = \begin{array}{l} E_0 \cos(\omega t - kz) \\ E_0 \sin(\omega t - kz) \\ 0 \end{array}$

1. Quel est l'état de polarisation de cette onde ?
2. Montrer que cette onde est la superposition de deux ondes planes polarisées rectilignement, $\vec{E}_1(z, t)$ selon \vec{u}_x et $\vec{E}_2(z, t)$ selon \vec{u}_y , de même vecteur d'onde $\vec{k} = k\vec{u}_z$.
3. En déduire les vecteurs $\vec{B}_1(z, t)$ et $\vec{B}_2(z, t)$ puis le vecteur résultant $\vec{B}(z, t)$.
4. En déduire le vecteur de Poynting $\vec{\Pi}(z, t)$.
5. Commenter le résultat obtenu.

Exercice 6 Éléments de la théorie des lames à retard. On prend le modèle suivant. Lorsque \vec{E} est selon une direction donnée, il interfère avec la matière par une succession d'absorptions et de réémissions de photons par les atomes ou ions du cristal selon le modèle quantique. Cette succession d'absorptions et de réémissions explique que, bien que la lumière se propage toujours à la vitesse c_0 dans le vide interatomique, elle est ralentie par le délai séparant l'excitation de l'atome par absorption du photon et sa désexcitation (ou relaxation) par réémission d'un photon de même énergie, donc correspondant à une OEM de même pulsation. Ainsi, l'anisotropie électrique du milieu peut expliquer qu'il existe des directions privilégiées de champ électrique selon lesquelles • l'interaction avec la matière est importante, donc les absorptions-réémissions seront fréquentes, donc la lumière sera fortement «ralentie» (l'axe lent) • ou bien l'interaction avec la matière est faible, donc les absorptions-réémissions seront rares, donc la lumière sera faiblement «ralentie» (l'axe rapide).

On considère une lame à faces parallèles de vecteur normal \vec{u}_z , d'épaisseur e (comprise entre les plans $z = 0$ et $z = e$), taillée dans un milieu tel qu'une OPPH PR selon l'axe rapide \vec{u}_X (respectivement l'axe lent \vec{u}_Y) le traverse à la célérité c_X (respectivement c_Y); on suppose que $c_X > c_Y$. Soit une onde incidente OPPHM de vecteur d'onde $\vec{k} = k\vec{u}_X$, polarisée rectilignement dont le champ électrique fait un angle α avec \vec{u}_X et de phase nulle en $z = 0$.

1. Donner l'expression de $\vec{E}(z, t)$ pour $z \leq 0$.
2. En déduire que cette onde est la superposition de deux OPPHM PR de champs électriques $\vec{E}_X(z, t)$ et $\vec{E}_Y(z, t)$ selon respectivement \vec{u}_X et \vec{u}_Y . Préciser les expressions de \vec{E}_X et \vec{E}_Y pour $z \leq 0$.
3. D'après le principe ondulatoire, ce qui se passe en $z = e$ est ce qui s'est passé en $z = 0$ à la date t - la durée que met l'onde à traverser la lame. En déduire les expressions de \vec{E}_X et \vec{E}_Y pour $z \geq 0$.
4. En déduire l'expression de $\vec{E}(z, t)$ pour $z \geq e$.
5. Déterminer la plus petite valeur de e pour laquelle l'onde émergente est polarisée elliptiquement avec pour axe principaux \vec{u}_X et \vec{u}_Y . Comment nomme-t-on alors une telle lame ? Justifier cette appellation.

Modèle photonique

Exercice 7 Poynting, énergie électromagnétique volumique. Dans le modèle photonique, on quantifie l'onde électromagnétique dans le vide. Le quantum est appelé le photon; ses caractéristiques sont les suivantes :

- sa vitesse est égale à la célérité de la lumière dans le vide, c_0 .
- Son énergie totale est égale au produit $E = h\nu$, où h est la constante de Planck et ν la fréquence de l'onde électromagnétique associée.
- Bien que sa masse soit nulle, il possède une impulsion qui s'identifie, en mécanique classique, à la quantité de mouvement (ou résultante cinétique en mécanique du solide) $\vec{p} = \frac{h\nu}{c_0}\vec{u}_x$ où λ est la longueur d'onde et \vec{u}_x le vecteur unitaire directeur de propagation de l'OEM associée.

On assimile, tant d'un point de vue énergétique que mécanique, une OPPHMPR à un flot de photons; on définit en particulier n_0 comme étant le nombre moyen de photons incidents par unité

de volume (unité m^{-3}). On cherche à déterminer l'expression de n_0 . Soit $\vec{E} \begin{cases} 0 \\ E_0 \cos(\omega t - kx) \\ 0 \end{cases}$ le champ électrique de l'OEM incidente. Donner l'expression du champ magnétique.

1. Première méthode : rappeler l'expression du vecteur de Poynting associé en fonction de ε_0 , c_0 , E et \vec{u}_x . Donner sa valeur moyenne dans le temps sur un plan d'abscisse x fixée. Rappeler l'expression de la valeur moyenne de la puissance incidente $\langle d\mathcal{P} \rangle$ à travers une surface $d\vec{S} = dS\vec{u}_x$. Donner l'expression du nombre de photons dN frappant dS pendant dt en fonction de n_0 , c_0 , dt et dS . En déduire l'énergie correspondante $d\mathcal{E}$ en fonction de n_0 , c_0 , dt , dS , h et ν puis la puissance associée $\langle d\mathcal{P} \rangle = \frac{d\mathcal{E}}{dt}$. En identifiant les deux expressions de $d\mathcal{P}$, en déduire l'expression de n_0 en fonction de ε_0 , E_0 , h et ν .
2. Deuxième méthode : rappeler l'expression de l'énergie électromagnétique volumique en fonction de ε_0 , E , μ_0 et B puis en fonction de ε_0 et E seulement pour l'OPPHMPR considérée. En déduire sa valeur moyenne dans le temps $\langle u_{\text{em}} \rangle$ sur un plan d'abscisse x fixée en fonction de ε_0 et $E - 0$. Donner d'autre part l'expression de l'énergie photonique moyenne par unité de volume en fonction de n_0 , h et ν . En identifiant les deux expressions de $\langle u_{\text{em}} \rangle$, en déduire l'expression de n_0 en fonction de ε_0 , E , h et ν .
3. Expliquer, au vu de l'équation locale de Poynting, pourquoi on trouve le même résultat.

Exercice 8 Détermination de la pression photonique, appelée aussi pression de radiation. On considère une plaque parfaitement réfléchissante dans le plan d'onde (contenue par exemple dans le plan $x = 0$) de surface dS . On verra dans un autre exercice l'interprétation ondulatoire de ses propriétés. Dans le modèle photonique, chaque photon incident rebondit en subissant un choc élastique, ce qui implique en particulier que l'impulsion \vec{p}_f du photon après le rebond est exactement opposé à l'impulsion incidente \vec{p}_i .

1. Exprimer la variation d'impulsion $\delta\vec{p} = \vec{p}_f - \vec{p}_i$ subie par un photon en fonction de h , ν et c_0 .
2. Combien de photons dN subissent-ils ce rebond sur la plaque pendant dt ? On exprimera le résultat en fonction de n_0 , c_0 , dt et dS .
3. Par application du TRC, en déduire la force $\vec{f}_{p \rightarrow \varphi}$ exercée par la plaque sur les photons incidents en fonction de n_0 , h , ν , c_0 , dt , dS et \vec{u}_x . En déduire la force $\vec{f}_{\varphi \rightarrow p}$ exercée par les photons incidents sur la plaque.
4. En déduire la pression photonique, ou pression de radiation P subie par la plaque de la part des photons en fonction de ε_0 et E_0 .

Exercice 9 Voile solaire. Un vaisseau spatial utilise une voile solaire, plane, de surface S , tendue avec Soleil arrière (vent arrière diraient les marins). On donne $\varepsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12} \text{F} \cdot \text{m}^{-1}$ et $\mathcal{G} = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{kg}^{-1} \cdot \text{m}^3 \cdot \text{s}^{-2}$. La puissance électromagnétique rayonnée par le Soleil est $\mathcal{P}_S = 3,82 \cdot 10^{26} \text{W}$. La masse du Soleil est $m_S = 2 \cdot 10^{30} \text{kg}$. On note r la distance Soleil-vaisseau et m la masse du vaisseau (comprenant celle de la voile).

1. Donner l'expression de la force attractive de gravitation \vec{f}_g subie par le vaisseau de la part du Soleil.
2. En considérant que la puissance \mathcal{P}_S est également diffusée dans toutes les directions de l'espace, montrer que la moyenne de la norme du vecteur de Poynting est $\langle \Pi \rangle = \frac{\mathcal{P}_S}{4\pi r^2}$.
3. En remarquant que la pression de radiation ne dépend pas de la pulsation, on suppose pour simplifier que l'OEM reçue en r est plane, harmonique et monochromatique. Donner l'expression du carré de l'amplitude E_0^2 du champ électrique en fonction de \mathcal{P}_S , ε_0 , c_0 et r .
4. Donner l'expression de la force motrice due à la pression de radiation \vec{f}_r en fonction de \mathcal{P}_S , c_0 , S , r et \vec{u}_r .
5. Le vaisseau veut s'éloigner du Soleil. En déduire l'expression du rapport $\frac{m}{S}$ maximal. À quelle grandeur s'identifie ce rapport, si on suppose que la masse de la voile est très supérieure à celle de la cabine? Comparer aux valeurs usuelles pour le papier; conclure.

Exercice 10 Courbure de la queue des comètes. Les comètes sont des assemblages de roches, cailloux et de glace qui, lors de leur passage au périhélie, se désagrègent. On suppose que la queue d'une comète est constituée de sphères de glace de rayon R variable, les plus grosses étant situées près du noyau cométaire, les plus petites au bout de la queue. Cette comète est bien visible lorsque la queue est éclairée par le Soleil, à une distance r du centre du Soleil.

1. Pourquoi la force de gravitation exercée par le Soleil sur la sphère est-elle du type $-K_1 \cdot R^3 \vec{u}_r$? Préciser l'expression de K_1 en ordre de grandeur.
2. Pourquoi la force de pression de radiation exercée par le rayonnement solaire est-elle du type $K_2 \cdot R^2 \vec{u}_r$? Préciser l'expression de K_2 en ordre de grandeur.
3. Montrer l'existence d'une valeur critique du rayon de la sphère, R_c , telle que si $R > R_c$ la sphère est attirée, si $R < R_c$, la sphère est attirée.
4. En déduire la forme particulière courbée de la queue des comètes.

Autres ondes

Exercice 11 Vecteurs d'onde distincts. Étudier la superposition de deux OPPHMPR telles que en O les deux ondes ont même amplitude en champ électrique E_0 , même vecteur champ magnétique \vec{B}_0 et de vecteurs d'onde distincts \vec{k}_1 et \vec{k}_2 .

Exercice 12 Onde entre deux plaques métalliques. On montrera au prochain chapitre que les conditions aux limites pour une OEM se propageant entre deux plans métalliques infinis et parfaitement conducteurs selon $z = 0$ et $z = a$ s'écrit $\vec{E} = E_0 \sin\left(\frac{\pi z}{a}\right) \cos(kx - \omega t) \vec{u}_y$

1. Établir la relation appelée équation de dispersion entre k et ω .
2. On appelle *vitesse de phase* $v_\varphi = \frac{\omega}{k}$ et *vitesse de groupe* $v_g = \frac{d\omega}{dk}$. Donner l'expression de ces deux quantités et calculer leur produit.
3. Déterminer l'onde de champ magnétique, en supposant la valeur moyenne partout nulle.
 - (a) En déduire la valeur moyenne de l'énergie électromagnétique U comprise dans le parallélépipède rectangle $(x, y, z) \in [0, 1] \times [0, 1] \times [0, a]$.
 - (b) Exprimer la valeur moyenne du vecteur de Poynting. et calculer son flux Φ à travers la section rectangulaire $(y, z) \in [0, 1] \times [0, a]$.
 - (c) Montrer que la vitesse de propagation de l'énergie est $\frac{\Phi}{U}$. Donner son expression et conclure.
4. On superpose deux de ces ondes, l'une de pulsation $\omega_1 = \omega_0 - \frac{\delta\omega}{2}$ et de vecteur d'onde $k_1 = k_0 - \frac{\delta k}{2}$ et l'autre de pulsation $\omega_2 = \omega_0 + \frac{\delta\omega}{2}$ et de vecteur d'onde $k_2 = k_0 + \frac{\delta k}{2}$; on suppose que $\delta\omega \ll \omega_0$ et $\delta k \ll k_0$. Exprimer l'onde résultante, mesurer la vitesse de propagation de l'enveloppe de cette onde et conclure.

Dipôle oscillant

Exercice 13 Question de cours. Un dipôle oscillant a pour expression $\vec{p} = p_0 \cos(\omega t) \vec{u}_z$. En un point M repéré par ses coordonnées sphériques $[r, \theta, \varphi]$, le champ rayonné s'écrit $\vec{E} = \frac{\mu_0 \sin \theta}{4\pi r} \ddot{p} \left(t - \frac{r}{c_0}\right) \vec{u}_\theta$, $\vec{B} = \frac{\mu_0 \sin \theta}{4\pi c_0 r} \ddot{p} \left(t - \frac{r}{c_0}\right) \vec{u}_\varphi$. Rappeler les conditions de validité de ces formules et justifier qu'on parle d'onde plane **locale**. Calculer la puissance moyenne rayonnée. Commenter le résultat obtenu. Pourquoi le soleil paraît-il rouge au coucher?

Exercice 14 Déterminer l'ordre de grandeur de la valeur numérique de la constante de raideur du ressort dans le modèle de l'électron élastiquement lié pour un atome d'hydrogène.

Exercice 15 Dipôle tournant. Un dipôle tournant dans le plan (O, x, y) est l'équivalent de la superposition de deux dipôles oscillants : $\vec{p} = p_0 \cos(\omega t) \vec{u}_x + p_0 \sin(\omega t) \vec{u}_y$. Dans le plan (O, x, z) , montrer que l'onde est polarisée, préciser les types possibles quand θ varie.

Exercice 16 Dans le modèle classique, un électron en rotation circulaire uniforme de rayon $r_0 = 10^{-10} \text{m}$ autour d'un proton forme approximativement un dipôle oscillant : préciser son énergie initiale, les valeurs de p_0 et de ω , et donner un ordre de grandeur de l'espérance de vie de cet atome. On donne $e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{C}$, $m_e = 9,11 \cdot 10^{-31} \text{kg}$, $\varepsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12} \text{F} \cdot \text{m}^{-1}$, $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{H} \cdot \text{m}^{-1}$.