Fiche méthodologique numéro 4

Équations aux dérivées partielles

22 mars 2008

1 Familles

- $\boxed{\text{Domaines}}$: il est possible de trouver des équations aux dérivées partielles dans **toutes** les branches de la physique. On peut dire qu'en sup,
  - on étudie localement (en un point donné) les variations dans le temps d'une grandeur (x, y, z, r, θ en mécanique du point, i, u q en électrocinétique), et qu'on apprend donc à écrire et à résoudre des équations différentielles par rapport au temps t
  - on apprend à déterminer des champs permanents dans l'espace (électrostatique, magnétostatique)

  En spé, avec la théorie des champs, on cherche à déterminer l'expression d'une grandeur dans l'espace et dans le temps.
- Le cas le plus général est une équation du second ordre par rapport aux variables d'espace (avec un laplacien scalaire ou vectoriel) et du premier ou du second ordre par rapport au temps. En pratique, on se limite aux équations monodimensionnelles.
- $\boxed{\text{Équation de d'Alembert : } \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = 0}$ Domaines : ondes mécaniques sans frottement, ondes électriques le long d'une ligne bifilaire non résistive, onde électromagnétique dans le vide onde acoustique, ...
- $\boxed{\text{Équation de diffusion : } \frac{\partial A}{\partial t} - D\Delta A = 0}$ Domaines : électromagnétisme (effet de peau), mécanique des fluides (diffusion de quantité de mouvement), diffusion de particules, diffusion thermique.
- $\boxed{\text{Équation de diffusion avec terme de création / disparition : } \frac{\partial A}{\partial t} - D\Delta A \pm K = 0}$
- $\boxed{\text{Équation de diffusion avec création / disparition proportionnelle : } \frac{\partial A}{\partial t} - D\Delta A \pm kA = 0}$
- $\boxed{\text{Équation de d'Alembert généralisée : } \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} - \alpha A - \beta\frac{\partial A}{\partial t} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = 0}$ Domaines : ondes mécaniques avec frottement, ondes électriques le long d'une ligne bifilaire résistive, onde électromagnétique dans un milieu onde acoustique dans un cornet acoustique, ...

2 Établissement des EDP

- De façon assez carricaturale, de nombreux sujets de physique sont bâtis ainsi :
  - dans la première partie, on étudie une EDP conventionnelle, vue en cours, et dans la deuxième partie, on modifie une ou plusieurs hypothèses, on demande d'établir (ou de vérifier l'expression de) la nouvelle EDP, on la résout de façon plus ou moins guidée et on en étudie les conséquences physiques théoriques qu'on confronte à la réalité expérimentale ;
  - ou on étudie d'emblée un phénomène original, non explicitement au programme de prépa (sujet “exotique”) mais dont la modélisation utilise une (ou plusieurs) branche(s) du programme, et dont le traitement mathématique débouche sur une EDP qu'il faut établir (ou vérifier) ; on la résout de façon plus ou moins guidée et on en étudie les conséquences physiques théoriques qu'on confronte à la réalité expérimentale.
- Dans tous les cas, les EDP résultent de l'écriture rigoureuse et soigneuse des lois classiques de la physique. Il faut donc parfaitement maîtriser son cours, et se placer dans l'état d'esprit de la discipline en question.

- On distingue trois grands axes d'établissement d'EDP :
  axe 1 : l'analyse vectorielle : les termes de dérivée spatiale résultent de la manipulation et la combinaison des trois opérateurs $\overrightarrow{\text{grad}}$, div , $\overrightarrow{\text{rot}}$ (EDA en EM, équation des ondes sonores (après linéarisation), équations de diffusion classiques (par combinaison de Fick/Fourier et de lois de conservation)) ;
  axe 2 : bilan sur une tranche élémentaire entre x et $x + dx$, entre r et $r + dr$ (EDA sur la corde vibrante)
  axe 3 : bilan entre t et $t + dt$ (équations de diffusion avec termes de création/ disparition)

3 Types de solutions

- Ne jamais oublier la règle des $\boxed{\text{ordres de grandeurs}}$, qui peut suffire à répondre à certaines questions : $\frac{\partial A}{\partial t} \simeq \frac{A}{\tau}$, $\overrightarrow{\text{grad}}\, A \simeq \text{div } A \simeq \frac{\partial A}{\partial x} \simeq \frac{A}{\delta}$, $\Delta x \simeq \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} \simeq \frac{A}{\delta^2}$, où τ est un temps caractéristique et δ une longueur caractéristique du phénomène.
- $\boxed{\text{Onde plane progressive harmonique } A(x,t) = A_0 \cos(\omega t \pm kx \pm \varphi) \text{ ou } \underline{A} = A_0 e^{i(\omega t \pm kx \pm \varphi)}}$: solution de référence de l'EDA, et dont les superpositions donnent les solutions planes seulement périodiques, les solutions stationnaires, et dans le cas d'ondes vectorielles les ondes polarisées.
- $\boxed{\text{Onde plane stationnaire (nécessairement harmonique) } A(x,t) = A_0 \cos(\omega t + \varphi) \cos(kx + \psi)}$: solution de l'EDA bien adaptée à un milieu fini avec des conditions aux limites imposées (nœuds ou ventres), établie par séparation des variables et égalité d'une fonction de t seul et d'une fonction de x seul, d'où égalité à une constante identique.
- $\boxed{\text{Pseudo onde plane progressive } \underline{A} = A_0 e^{i(\omega t \pm \underline{k} x \pm \varphi)} \text{ et } A(x,t) = A_0 e^{k'' x} \cos(\omega t \pm k' x \pm \varphi)}$: $\underline{k}$ est la solution de l'équation en nombre complexes appelée $\boxed{\text{équation de dispersion}}$ bien adaptée à l'EDA généralisée ou à l'équation de diffusion (OEM dans un diélectrique absorbant).
- $\boxed{\text{Solution non propagative quand } \underline{k} \text{ imaginaire pur : } A(x,t) = A_0 e^{k'' x} \cos(\omega t + \varphi)}$ cas du plasma en dessous de la pulsation de coupure, $\underline{k}^2 \in \mathbb{R}^-$.
- $\boxed{\text{Solution indépendante du temps en régime permanent}}$ cas particulier : équation de Poisson (résistance thermique).
- $\boxed{\text{Solution uniforme, solution d'une éq. différentielle par rapport à } t}$ dans l'AEQS en particulier (j ou j_{Th} dans un problème unidirectionnel longitudinal).
- $\boxed{\text{Solution savante de l'éq. de diffusion : } n(x,t) = \frac{A}{\sqrt{t}} e^{-\frac{x^2}{4Dt}} \text{ ou } n(x,t) = n_0 \left[1 - erf\left(\sqrt{\frac{x^2}{4Dt}}\right)\right]}$

4 Conditions aux limites, conditions initiales

- Condition aux limites sur la variable, plus ou moins camouflée (corde de Melde).
- Condition aux limites sur une dérivée de la variable (par exemple $j_{\text{Th}} = 0$ pour une paroi calorifugée).
- Loi de continuité ou de discontinuité (OEM sur un dipotre, ondes sonores, ondes mécaniques)
- Conditions initiales avec une forme ou une répartition initiale imposée.
- La prise en compte de CL et/ou CI nécessite une vision algébrique des fonctions, travailler par identification et pas par résolution.
- Pour déterminer une phase, il est inutile en général de rajouter un modulo π ou 2π.
- En revanche, en fin de résolution, les relations de quantification sur une variable s'obtiennent justement par une solution d'équation trigonométrique modulo un angle, d'où l'apparition d'un entier n.
- On peut procéder à l'élimination d'une constante d'intégration si elle est coefficient d'un terme qui diverge ($a \ln r$ avec r pouvant être nul, écoulement de Poiseuille) ou à une constante d'intégration additive si la valeur moyenne est nulle.