Fiche méthodologique numéro 2

Mécanique des fluides

22 novembre 2007

Il n'existe pas de méthode universelle de résolution d'un exercice de mécanique des fluides. Dans une majorité de sujets d'**écrits** de concours, l'énoncé suggère la méthode à utiliser. En revanche, à l'**oral**, il est possible d'avoir à répondre à une question "brutale" sans que la méthode soit suggérée.

On peut retenir qu'un problème de mécanique des fluides est en général résolu en **conjuguant** diverses lois. Voici l'esprit et les particularités de chacune d'entre elles.

1. $\boxed{\text{Les propriétés cinématiques}}$ données a priori pour un écoulement permettent soit d'écrire une équation supplémentaire, soit de simplifier une loi de dynamique des fluides.
   (a) Pour un écoulement stationnaire, les dérivées eulériennes sont nulles.
   (b) Pour un écoulement stationnaire, en l'absence de source, div $(\mu\overrightarrow{v}) = 0$.
   (c) Pour un écoulement stationnaire, en présence de sources, le débit massique sortant à travers une surface fermée est égal au débit massique des sources (cf. fontaine et puits linéïque).
   (d) Pour un écoulement incompressible, en l'absence de source, div $\overrightarrow{v} = 0$.
   (e) Pour un fluide incompressible, $\mu = cste$.
   (f) Pour un écoulement irrotationnel, $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$ et on peut définir un potentiel des vitesses par $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\Phi$.
2. $\boxed{\text{L'équation d'Euler}}$ peut être écrite de plusieurs manières différentes.
   (a) À gauche, le terme d'accélération particulaire vaut

$$\mu\frac{D\overrightarrow{v}}{Dt} = \mu\left(\frac{\partial\overrightarrow{v}}{\partial t} + (\overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{\mathrm{grad}})\overrightarrow{v}\right) = \mu\left(\frac{\partial^2\overrightarrow{v}}{\partial t^2} + \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\frac{\overrightarrow{v}^2}{2} + \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{v}\wedge\overrightarrow{v}\right)$$

   La première écriture est utilisée lorsqu'on peut prouver facilement que la vitesse d'une particule de fluide est constante ; la deuxième est difficile à écrire en général, et doit être réservée au cas où le repère est cartésien ($\overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{\mathrm{grad}}$ n'est pas donné en général en cylindrique ou sphérique) ; la troisième est lourde, mais est à la base de la démonstration de Bernoulli.
   (b) À droite, on a dans le cas général

$$-\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,P + \overrightarrow{f}\text{volumiques}$$

   Les forces volumiques se résument en général au poids volumique $\mu\overrightarrow{g}$ et éventuellement aux forces d'inertie volumiques $-\mu\overrightarrow{a}_e - 2\mu\overrightarrow{\omega}\wedge\overrightarrow{v}_r$.
   (c) L'équation d'Euler donne un système d'équations aux dérivées partielles temporelles et spatiales. On les résout en écrivant les conditions aux limites et initiales.
3. $\boxed{\text{L'équation de Navier-Stokes}}$, normalement donnée par l'énoncé mais qu'il est conseillé de connaître, donne des équations aux dérivées partielles ; attention à l'écriture de $\Delta\overrightarrow{v}$; on retrouve à peu près toujours les cas classiques des écoulements de Couette et de Poiseuille (à connaître sur le bout des doigts). On se souviendra des conditions aux limites très particulières dans le cas des fluides visqueux, nullité de la vitesse au contact de la paroi, nullité du coefficient du ln pour éviter la divergence de la vitesse, nullité de la force surfacique de viscosité à l'interface fluide-air.

4. $\boxed{\text{Le théorème de Bernoulli}}$ doit s'accompagner d'une vérification soigneuse des hypothèses, et d'un dessin. Sur celui-ci figurent les points entre lesquels on applique Bernoulli et les éventuelles lignes de courant sur lesquelles on applique la loi dans sa première forme.
   (a) Les cas d'application du théorème de Bernoulli classique sont assez faciles à reconnaître : on met en relation pression, altitude et vitesse en deux points. Le bon choix des points passe par l'identification des grandeurs connues : pression égale à P_0 en un point à la surface du liquide ou en un point où le jet s'écoule à l'horizontale à l'air libre, altitude de référence du problème, vitesse nulle ou négligeable ou vitesse égale à la vitesse de la rivière en un point situé à l'infini.
   (b) Dans plusieurs cas (cf. oscillations dans un tube en U), il faut refaire la démonstration de Bernoulli dans un cas plus général ; on rappelle que celà revient à intégrer la circulation d'Euler entre deux points.
5. $\boxed{\text{Les bilans}}$ forment une alternative aux équations d'Euler et de Bernoulli. Le schéma est indispensable pour identifier le système à la date t et à la date $t + dt$. Le principe général est :
   (a) À la date t, le système comprend une masse entrante et la partie $S_i(t)$ intérieure au système ouvert.
   (b) À la date $t+dt$, le système comprend une masse sortante et la partie $S_i(t+dt)$ intérieure au système ouvert.
   (c) Dans la majorité des cas, on est en régime permanent et $S_i(t)$ est identique à $S_i(t+dt)$: les deux termes intérieurs s'éliminent dans le bilan. Ainsi, on établit que $dm_e = dm_s$, que la somme des forces de pression et des autres forces est égale à $\frac{d\vec{P}_s - d\vec{P}_e}{dt}$, que la somme des travaux des forces est égale à la variation d'Ec, que la somme des travaux des forces et des chaleurs reçues est égal à la variation d'énergie totale, etc...
   (d) On retiendra bien la méthode consistant à se placer dans le référentiel de l'onde de choc ou de la vague pour se ramener au cas du régime permanent.
   (e) Lorsqu'on n'est pas en régime permanent, il ne faut pas oublier de compter la variation de la grandeur pour le système S_i entre t et $t + dt$ dans le bilan.
6. $\boxed{\text{Les équations phénoménologiques}}$ sont en général fluide incompressible ou gaz parfait ; dans ce dernier cas, on écrit $P\mu = MRT$ et si l'écoulement est isentropique, $P\mu^\gamma = cste$.

Les équations obtenues permettent de calculer beaucoup de grandeurs différentes et d'interpréter des phénomènes d'une grande diversité (cf. naufrage d'un bateau). On pourraît dire en somme que la difficulté de la mécanique des fluides a trois origines :

1. difficulté d'écriture des lois de la mécanique des fluides
2. difficulté de résolution des équations
3. aucune routine ne peut s'installer : on ne sait jamais a priori ce que l'énoncé va nous demander de déterminer.

En conclusion, DU SOIN, DES SCHÉMAS CLAIRS et DES BILANS PRÉCIS. On vous sera toujours reconnaissant de bien écrire les lois, et on vous aidera largement dans la résolution : les équations aux dérivées partielles sont difficiles au début, et vous avez devant vous l'électromagnétisme, les ondes et le diffusion pour acquérir plus d'aisance.