

# Feuille d'exercices numéro 3

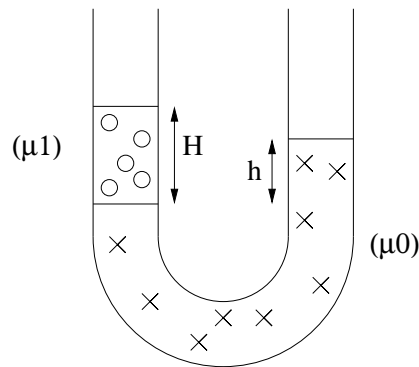
Mécanique des fluides

PC, 2 octobre 2008

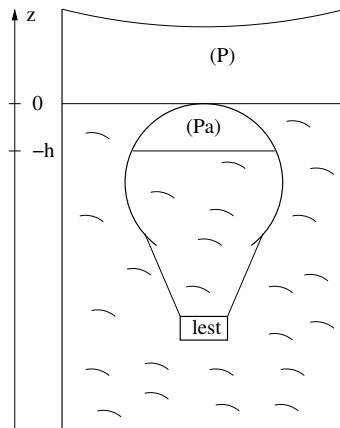
## Statique des fluides

**Exercice 1 Tour de « magie ».** On met une feuille de carton rigide sur un verre rempli d'eau. On retourne le verre. Expliquer pourquoi l'eau ne se renverse pas.

**Exercice 2 tube en U (statique).** Dans le tube en U suivant, déterminer la relation entre les hauteurs, les masses volumiques et  $g$ .

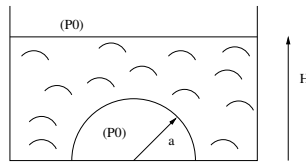


**Exercice 3 Ludion.** Un ludion est constitué d'un petit réservoir sphérique de volume  $V$ , de masse  $m$ , ouvert à sa base, baignant dans l'eau d'une éprouvette; par l'orifice inférieur, de l'eau peut rentrer dans ce réservoir, emprisonnant ainsi un peu d'air. On appelle  $P$  la pression de l'air à la surface de l'eau de l'éprouvette,  $P_0$  la pression de l'air à la surface de l'eau dans le réservoir. On note  $\mu_e$  la masse volumique de l'eau supposée incompressible et  $g$  l'accélération de la pesanteur. L'axe  $(O, z)$  est orienté vers le haut et son origine est prise à la surface de l'eau dans l'éprouvette. On se place dans des conditions initiales telles que le réservoir est à la limite de la flottaison : la pression de l'air extérieur est  $P = P_{ref}$ , le haut du réservoir affleure à la surface de l'eau et le niveau de l'eau dans le réservoir est situé à l'altitude  $-h$ .



1. On assimile l'air dans le réservoir à  $n$  moles de gaz parfait à la température  $T$  constamment égale à celle de l'eau et de pression uniforme. En déduire l'expression du volume d'air  $V_i$  emprisonné dans le réservoir en fonction des différentes variables et constantes du problème.
2. Exprimer la condition d'équilibre du système formé du réservoir, de l'eau et de l'air qu'il contient. On pourra négliger la masse de l'air devant celle du réservoir.
3. La pression  $P$  de l'air à la surface de l'eau de l'éprouvette prend une valeur strictement supérieure à  $P_{ref}$ . En utilisant les résultats précédents, montrer que le ludion va commencer à couler.
4. Le ludion va-t-il s'immobiliser à une profondeur particulière, ou couler jusqu'au fond de l'éprouvette?

**Exercice 4 Demi-sphère au fond d'un aquarium.** Dans la figure suivante, on place une demi-sphère indéformable de rayon  $a$  remplie d'air atmosphérique à la pression  $P_0$  sur le fond plat d'un aquarium rempli d'eau (hauteur  $H$ ). Déterminer la résultante des forces de pression sur la demi-sphère.



**Exercice 5 Atmosphère isotherme et facteur de Boltzmann.** L'atmosphère est assimilée à un gaz parfait de masse molaire  $M$ , soumise au champ de pesanteur d'accélération uniforme  $g$ . L'axe  $(O, z)$  est vertical,  $z = 0$  correspondant au niveau de la mer. Les propriétés physiques de l'atmosphère sont uniformes sur une couche d'égale altitude  $z$  et on note  $P(z)$  la pression,  $\mu(z)$  la masse volumique et  $T(z)$  la température à l'altitude  $z$ . On note  $P_0$ ,  $\mu_0$  et  $T_0$  leurs valeurs en  $z = 0$ . On note  $R$  la constante des gaz parfaits,  $N_A$  le nombre d'Avogadro et  $k_B = \frac{R}{N_A}$  la constante de Boltzmann.

1. Rappeler la loi locale d'équilibre des fluides reliant  $\frac{dP}{dz}$ ,  $\mu$  et  $g$ .
2. Déduire de l'équation d'état des gaz parfaits une relation entre  $P(z)$ ,  $\mu(z)$  et  $T(z)$ . En déduire la valeur numérique de  $\mu_0$ .
3. On suppose à partir de cette question que l'atmosphère est isotherme :  $T(z) = T_0$ . Établir l'expression de la pression  $P$  en fonction de l'altitude  $z$ .
4. En déduire l'expression littérale d'une hauteur caractéristique  $\delta$ , calculer sa valeur numérique et préciser son sens physique. Quels effets physiologiques peut-on prévoir pour un alpiniste en haut de l'Everest (altitude 8800m) ?
5. On note  $\nu(z)$  la densité moléculaire volumique de l'air (exprimée en nombre de molécules par mètre cube, ou plus simplement en  $m^{-3}$ ) à l'altitude  $z$ . Montrer qu'on peut écrire

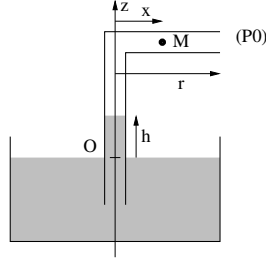
$$\nu(z) = \nu(0)e^{-\frac{e_p}{e_t}}$$

où  $e_p$  est l'énergie potentielle de pesanteur d'une seule molécule et  $e_t$  une énergie dont on précisera l'expression et le sens physique.

**Exercice 6 Statique des fluides en référentiel non galiléen.** Un verre rempli d'eau est posé sur un plateau tournant horizontal à la vitesse angulaire  $\omega$ .

1. Pourquoi l'eau finira-t-elle progressivement par tourner à la même vitesse angulaire que le verre? Décrire brièvement les états intermédiaires.
2. On admet que la surface libre du liquide est une surface d'égale énergie potentielle (en tenant compte de l'énergie potentielle de pesanteur et de l'énergie potentielle d'inertie d'entraînement axifuge). Déterminer l'équation ( $z = \varphi(r)$ ) de la surface.
3. Comment la forme de la surface peut-elle évoluer si  $\omega$  devient très rapide?

**Exercice 7 Aspirateur rotatif.** Dans le dispositif suivant, le tube coudé plonge dans un liquide de masse volumique  $\mu$ . Il tourne à vitesse angulaire constante  $\omega$  autour de l'axe  $(O, z)$ .



On note  $P_0$  la pression de l'air extérieur.

1. Le point  $M$  est repéré par son rayon  $x$ . On suppose que la masse volumique de l'air est une constante uniforme  $\mu_0$ . Calculer la pression  $P(x)$ .
2. Le point  $M$  est repéré par son rayon  $x$ . On suppose que la masse volumique de l'air mais on prend maintenant en compte les variations de la masse volumique de l'air avec la pression. Calculer la pression  $P(x)$ .
3. On suppose désormais que la masse volumique de l'air est constante et uniforme  $\mu_0$ . Déterminer la dénivellation  $h$ . Faire l'AN avec  $\omega = 100\pi \text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$ ,  $r = 0, 100 \text{m}$  et  $\mu = 10^3 \text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$ .

## Cinématique des fluides

**Exercice 8 Canalisations cylindriques.** Dans une canalisation cylindrique rectiligne, d'axe  $(O, z)$ , de rayon  $R$ , un fluide de masse volumique  $\mu$  circule avec un champ de vitesses  $\vec{v}(M, t)$ . On note  $D_m$  le débit massique.

1. Déterminer le champ des vitesses pour un fluide incompressible, un débit massique constant et un champ des vitesses uniforme. Préciser la ou les catégories auxquelles appartient cet écoulement.
2. Déterminer le champ des vitesses, sa dérivée particulaire (en précisant l'accélération convective et l'accélération locale) pour un fluide incompressible, un débit massique augmentant lentement (avec un temps caractéristique  $\tau$  négligeable devant celui de la traversée de la canalisation par le fluide) selon la loi  $D_m = D_0 \left(1 + \frac{t}{\tau}\right)$  et un champ des vitesses uniforme. Préciser la ou les catégories auxquelles appartient cet écoulement.
3. Le fluide est maintenant un gaz parfait de masse molaire  $M$  à la température uniforme et constante  $T$  et le champ des pressions est  $P(z) = P_0 \left(2 - \frac{z}{L}\right)$ . On suppose que le champ des vitesses et des masses volumiques est uniforme sur toute section droite de la canalisation.
4. Le champ des vitesses d'un fluide dans une canalisation cylindrique droite de rayon  $R$  est  $\vec{r}' = v_0 \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) \vec{u}_z$ . Déterminer le débit volumique. Déterminer la vitesse moyenne débitante (c'est-à-dire celle qu'aurait un fluide de même débit avec une vitesse uniforme dans toute section) et la vitesse moyenne mesurée le long d'un rayon (ou d'un diamètre) de la section.

**Exercice 9 Calculs techniques.**

1. Une particule de fluide passe au point de coordonnées cartésiennes  $(1, 2, 3)$  à la date  $t = 1 \text{s}$  lors d'un écoulement caractérisé par le champ des vitesses  $\vec{v} = 3x \vec{u}_x + (8y + 5) \vec{u}_y + 10t^2 \vec{u}_z$ . Déterminer les équations paramétriques de la trajectoire de cette particule fluide.
2. Calculer l'accélération particulaire d'une particule de fluide avec le champ eulérien  $\vec{v} = V_0 e^{-\lambda t} (bx \vec{u}_x + cy^2 \vec{u}_y)$ . Utiliser les deux formules.
3. On considère le potentiel  $\phi = x^2 y - x + 2y^2 + 8t^3 + 7zt$ . Déterminer le champ des vitesses et déterminer s'il est rotationnel ou pas.

- On considère le potentiel  $\phi = \ln(x^2 + y^2)$ . Déterminer le champ des vitesses et vérifier l'équation de continuité.
- La masse volumique de l'air est donné par  $\rho = \rho_0 [1 + a(x^2 + y^2) + e^{-bz}]$  avec  $\rho_0 = 1,3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$  et  $b = 3,0 \cdot 10^{-4} \text{ m}^{-1}$ . Un avion se déplace à la vitesse  $\vec{V} = (133 ; 8,89 ; -8,33)$ . Il passe, à la date  $t$ , par le point de coordonnées  $(0 ; 0 ; 5000)$ . Déterminer, de son point de vue, la dérivée particulaire de  $\rho$ .

**Exercice 10 champs de vitesses divers.** Dans les trois situations suivantes, tracer la cartographie du champ de vitesses, calculer la dérivée particulaire de la vitesse en précisant l'accélération convective et l'accélération locale et préciser la ou les catégories auxquelles appartient cet écoulement.

- Le mouvement oscillatoire horizontal du fond d'un récipient provoque un champ de vitesses

$$\vec{v} = v_0 e^{-kz} \cos(\omega t - kz) \vec{u}_x$$

- Le fluide compris entre deux plaques horizontales placées en  $z = -e$  et  $z = +e$ , animées de vitesses respectives  $v_0 \vec{u}_x$  et  $-v_0 \vec{u}_x$ , a pour champ des vitesses  $\vec{v} = v_0 \frac{z}{e} \vec{u}_z$ .
- Le fluide compris entre deux plaques cylindriques coaxiales, de rayons respectifs  $r_1$  et  $r_2$ , de vitesses angulaires  $\omega_1$  et  $\omega_2$ , a pour champ des vitesses  $\vec{v} = \left( \lambda r + \frac{\zeta}{r} \right) \vec{u}_\theta$  où  $\lambda$  et  $\mu$  sont des constantes qu'on déterminera.

**Exercice 11 Dipôle hydrodynamique et vortex.**

- Montrer que le théorème de Gauss est équivalent à la loi de conservation de flux. Application : une fontaine linéique est un filärectiligne infini d'où sort un fluide incompressible ; le débit volumique linéique est  $d_V = \frac{dD_V}{dt}$ . Montrer qu'un écoulement radial irrotationnel peut s'établir et préciser ses caractéristiques. Déterminer le potentiel des vitesses  $\phi$ .
- On associe une fontaine et un puits linéiques de débits respectifs  $d_V$  et  $-d_V$ . Le fluide est incompressible et on se place en régime permanent. Soit  $\mathcal{P}$  un plan perpendiculaire aux deux axes,  $N$  et  $P$  les points d'intersection du plan avec le puits et la source respectivement,  $O$  le milieu de  $[N, P]$  et  $M$  un point de  $\mathcal{P}$  défini par ses coordonnées polaires  $r = OM$  et  $\theta = (\vec{NP}, \vec{OM})$ . Déterminer le champ des vitesses et le potentiel dans l'approximation dipolaire. Donner une allure de la topographie de l'écoulement.
- Un fluide incompressible de masse volumique  $\mu$  se déplace en rencontrant un cylindre fixe, d'axe  $(O, z)$ , de rayon  $R$  et de centre  $O$ . Très loin de cet obstacle, le champ des vitesses est uniforme :  $\vec{v}_0 = v_0 \vec{u}_x$ . On se place en régime stationnaire.

- Montrer que la superposition du champ uniforme et du champ du dipôle hydrodynamique (voir exercice précédent) :  $\vec{v} = \vec{v}_0 + \frac{p}{2\pi r^2} (\cos \theta \vec{u}_r + \sin \theta \vec{u}_\theta)$  représente un écoulement irrotationnel compatible avec les données à condition de choisir convenablement le moment dipolaire  $p$ . Donner une allure de la topographie.
- Montrer que la superposition du champ uniforme et du champ du dipôle hydrodynamique (voir exercice précédent) et d'un champ dit de vortex :

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \frac{p}{2\pi r^2} (\cos \theta \vec{u}_r + \sin \theta \vec{u}_\theta) + \frac{\lambda}{r} \vec{u}_\theta$$

représente un écoulement irrotationnel compatible avec les données à condition de choisir convenablement le moment dipolaire  $p$ . Donner une allure de la topographie.