Feuille d'exercices numéro 8

Ondes sonores

PC, 8 janvier 2009

Ondes sonores : généralités

Exercice 1 Relations diverses. Résoudre l'équation de d'Alembert en cherchant, avec le formalisme complexe, les solutions sous la forme d'ondes planes progressives harmoniques ; établir l'ensemble des relations liant ω, f, T, k, λ et c.

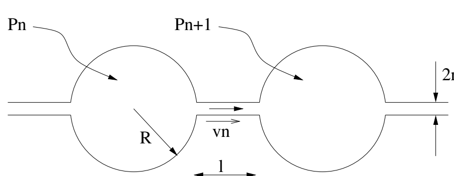
Exercice 2 Superposition onde incidente - onde réfléchie. Donner l'expression de la superposition de deux ondes planes progressives harmoniques de même amplitude et de vecteurs d'onde opposés. Reconnaître le type d'onde. Donner son amplitude en un point M repéré par $\overrightarrow{r} = \overrightarrow{OM}$.

Exercice 3 Réflexions multiples. Quand une onde sonore émise par une source S se réfléchit sur un mur immobile, l'onde réfléchie est celle émise par une source virtuelle, symétrique de la source S par rapport au mur et émettant une onde de fonction d'onde opposée en signe et atténuée en amplitude par rapport à celle émise par S :

$$y_{S'}(t) = -\alpha y_S(t) \quad \text{avec} \quad \alpha \in [0, 1]$$

Une source S de son émet une onde harmonique, de fonction d'onde $y_S(t) = A\cos(\omega t)$. Elle est située contre un mur en face d'un autre mur parallèle distant de L et émet une onde incidente dans le sens des x croissants. Déterminer les positions des sources virtuelles successives S', S'', $S^{(3)}$, …, $S^{(n)}$, … et donner l'expression de l'onde résultante. Étudier les éventuelles résonances.

Exercice 4 Le tuyau cannelé chanteur. Un tuyau cannelé (servant de gaine de protection aux cables électriques et aux conduites d'eau enterrées, noyées ou encimentées) est modélisé par des alvéoles presque sphériques de rayon R séparées par des tubes fins cylindriques de longueur ℓ et de rayon r. On étudie la propagation d'une onde acoustique de longueur d'onde λ avec $r \ll \ell \simeq R \ll \lambda$. On note $P_0 + p_n$ la pression dans la n-ième alvéole et $\overrightarrow{v}_n = v_n \overrightarrow{u}_x$ la vitesse dans le tuyau séparant la n-ième et la $n+1$-ième alvéole. On note μ la masse volumique de l'air et $\chi = \frac{1}{\mu}\frac{\partial \mu}{\partial P}$ le coefficient de compressibilité.



1. Établir une relation entre la différence des surpressions $p_n - p_{n+1}$ et la vitesse v_n. En déduire une loi analogue à celle du type inductance en complexes.
2. Établir une relation entre la différence des vitesses $v_{n-1} - v_n$ et la surpression p_n. En déduire une loi analogue à celle du type capacité en complexes.
3. On fait l'approximation du continu : $X_{n+1} - X_n \simeq \frac{\partial X}{\partial x} \cdot a$ avec $a = x_{n+1} - x_n = 2R + \ell$ ici. Étanblir l'équation de d'Alembert vérifiée par p (par exemple) et faire l'analogie avec l'équation des télégraphistes. Donner l'expression de la célérité c des ondes acoustiques dans le tuyau cannelé.
4. Expliquer le chant du tube cannelé entendu lorsqu'on le fait tourner à des vitesses variables (cf. expérience).

Puissance et énergie acoustiques

Exercice 5 **Question de cours**. Un tympan de faible masse, plan, de surface $d\overrightarrow{S}$ est soumis à sa droite (du côté de l'oreille interne) à la pression normale P_0 et à sa gauche (du côté externe) à une onde sonore de pression $P_0 + p_1$; on assimilé la vitesse $\overrightarrow{v}_1$ à celle du tympan.

1. Donner l'expression de la force de pression résultante s'exerçant sur le tympan.
2. En déduire celle de la puissance $d\mathcal{P}$ de la force sur le tympan.
3. Montrer qu'on peut définir un vecteur $\overrightarrow{\Pi}$ tel que $d\mathcal{P} = \overrightarrow{\Pi} \cdot d\overrightarrow{S}$. Préciser l'unité de Π.
4. En déduire l'expression de la puissance traversant une membrane $\mathcal{S}$ sous la forme d'un flux.
5. On donne la formule d'analyse vectorielle

$$\text{div } (a\overrightarrow{u}) = a\text{div } \overrightarrow{u} + \overrightarrow{\text{grad}}\, a \cdot \overrightarrow{u}$$

   (a) Rappeler les trois équations linéarisées dans l'approximation accoustique : (E) l'équation d'Euler, (C) l'équation de conservation de la masse et (I) la loi d'évolution isentropique.

   (b) En déduire l'équation locale de conservation de l'énergie sonore sous la forme

$$\text{div } \overrightarrow{\Pi} + \frac{\partial u_{\text{son}}}{\partial t} = O$$

   où on précisera la définition et l'unité de u_{son}.

   (c) Rappeler l'équation locale de Poynting et comparer.

6. Établir l'équation intégrale de conservation de l'énergie sonore et la comparer à l'équation intégrale de Poynting.

Exercice 6 Une membrane plane de surface $S = 100\text{cm}^2$ vibre dans l'air à 300K ($\mu_0 = 1{,}18\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$) à la fréquence $f = 200\text{Hz}$. Sa puissance acoustique moyenne émise est $\mathcal{P} = 10\text{W}$ et on assimile l'onde sonore à une onde plane harmonique se propageant seulement d'un côté de la membrane.

1. Donner l'amplitude pour la membrane des ondes en surpression, vitesse et position.
2. Donner les expressions des valeurs moyennes $< \overrightarrow{\Pi} >$ et $< u_{\text{son}} >$.
3. Quand cette onde frappe perpendiculairement un tympan de surface $s = 1\text{cm}^2$, déterminer la puissance qu'il reçoit.

Exercice 7 Une onde sonore plane progressive harmonique est émise selon les abscisses $x > 0$ par la vibration d'une membrane plane de surface S en $x = 0$, commençant à la date $t = 0$:

$$p_1(x,t) = \left| \begin{array}{l} 0 \text{ si } t < 0 \\ P_1 \cos(\omega t) \text{ si } t \geq 0 \end{array} \right.$$

On note c la célérité du son dans le fluide.

1. Préciser la position du front d'onde à la date t.
2. En déduire l'énergie sonore totale dans le demi-espace $x > 0$.
3. Calculer $\overrightarrow{\Pi}$.
4. Vérifier l'équation intégrale de conservation de l'énergie sonore.

Réflexion - transmission

Exercice 8 **Réflexion sur l'interface air - hélium**. Calculer les coefficients de réflexion et de transmission de puissance d'une onde plane progressive harmonique au niveau d'un dioptre plan séparant de l'air et de l'hélium aux mêmes températures et pressions (les gaz sont supposés parfaits).

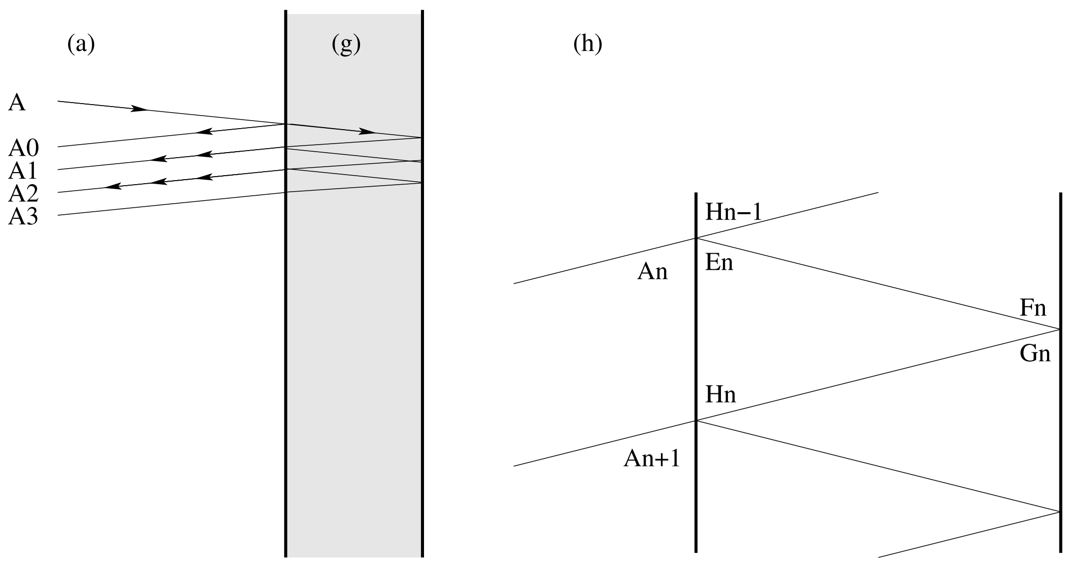
Exercice 9 **Nullité de T**. Dans quels cas concrets le coefficient T est-il nul ? Dans ce cas, quelle est la nature de la superposition de l'onde incidente et de l'onde réfléchie ? Quelle est alors la valeur moyenne $< \overrightarrow{\Pi} >$?

Exercice 10 Réflexion sur une discontinuité de section. Un tuyau infini a pour section S_1 pour $x < 0$ et S_2 pour $x > 0$.

1. Montrer la continuité de la pression et du débit massique.
2. En déduire les coefficients de réflexion et de transmission.

Exercice 11 Échographie. On donne l'impédance acoustique de l'air $Z_a = 400\ \mathrm{Pa} \cdot \mathrm{m}^{-1} \cdot \mathrm{s}$ et celle des tissus du corps humain $Z_h = 1,0 \cdot 10^6\ \mathrm{Pa} \cdot \mathrm{m}^{-1} \cdot \mathrm{s}$.

1. **Préliminaires**
   (a) Calculer le coefficient de réflexion pour la vitesse au changement de milieu.
   (b) En conclure qu'il est impossible d'effectuer une échographie dans ces conditions.
   (c) En formalisme complexe, on note $\underline{P}$ la fonction d'onde de pression en x à la date t. L'onde se propage selon l'axe des x croissants à la célérité c. Montrer que $\underline{P}(x+e,t) = \underline{P} \cdot e^{-jke}$.
2. On interpose un gel d'impédance acoustique Z_g, de masse volumique $\mu_g \simeq 10^3 \mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^{-3}$ et d'épaisseur e entre l'air et la peau.



On cherche à déterminer l'épaisseur e et l'impédance acoustique Z_g permettant de n'avoir aucune réflexion. Pour celà, on va créer des conditions permettant d'observer des interférences destructives entre les différentes ondes réfléchies $\underline{A}_0, \underline{A}_1, \ldots, \underline{A}_n, \underline{A}_{n+1}, \ldots$ où $\underline{A}_n$ désigne la fonction d'onde complexe (pour la pression par exemple) de la n-ième onde émergente du gel vers l'air. On note (cf. schéma) $\underline{E}_n$ la fonction d'onde juste à droite de l'interface air-gel (après réflexion-transmission), $\underline{F}_n$ la fonction d'onde juste à gauche de l'interface gel-peau (avant réflexion), $\underline{G}_n$ la fonction d'onde juste à gauche de l'interface peau-gel (après réflexion), $\underline{H}_n$ la fonction d'onde juste à droite de l'interface gel-air (avant réflexion-transmission). On note r_{ij} et t_{ij} les coefficients de réflexion à l'interface du milieu (i) et du milieu (j).

(a) Montrer que $\underline{A}_0 = r_{ag}\underline{A}$.
(b) Établir les relations entre
   i. $\underline{H}_{n-1}$ et $\underline{A}_n$ (en utilisant t_{ga})
   ii. $\underline{H}_{n-1}$ et $\underline{E}_n$ (en utilisant r_{ga})
   iii. (conséquence des deux premières) $\underline{A}_n$ et $\underline{E}_n$ (en utilisant r_{ga} et t_{ga})
   iv. $\underline{E}_n$ et $\underline{F}_n$ (en utilisant e^{-jke})
   v. $\underline{F}_n$ et $\underline{G}_n$ (en utilisant r_{gh})
   vi. $\underline{G}_n$ et $\underline{H}_n$ (en utilisant e^{-jke})
   vii. $\underline{H}_n$ et $\underline{A}_{n+1}$ (en utilisant t_{ga}.

(c) Déduire de la question précédente que $(\underline{A}_n)$ forme une suite géométrique de premier terme et de raison :

$$\underline{A}_1 = t_{ag} r_{gh} t_{ga} e^{-2jke} \underline{A} \quad \text{et} \quad \underline{q} = r_{gh} r_{ga} e^{-2jke}$$

(d) Pour que cette suite soit intégrable, il suffit qu'elle soit de raison réelle strictement inférieure à 1 en valeur absolue. On impose donc $e^{-2jke} = -1$; en déduire la plus petite valeur de e compatible en l'exprimant en fonction de la célérité c_g et de la fréquence f de l'onde ultrasonore.

(e) Sous cette hypothèse, la série se calcule aisément (on peut admettre le résultat pour gagner du temps) :

$$\underline{A}_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \underline{A}_n = r_{ag} \underline{A} + \left[\sum_{n=1}^{\infty} \underline{q}^{n-1} \right] \underline{A}_1 = \left[r_{ag} - t_{ag} r_{gh} t_{ga} \frac{1}{1 - (-r_{gh} r_{ga})} \right]$$

i. Montrer que $t_{ag} t_{ga} = 1 + r_{ag} r_{ga}$.

ii. En déduire que l'onde réfléchie dans l'air est nulle si $r_{ag} = r_{gh}$.

iii. En déduire que $Z_g = \sqrt{Z_a Z_h}$.

(f) Calculer numériquement Z_g.

(g) Calculer numériquement e si $f = 5$ MHz.

Exercice 12 Réflexion sur une membrane. Une membrane fine et imperméable, de masse surfacique σ est placée en $x = 0$, l'air de part et d'autre est supposé parfait non visqueux, en évolution isentropique, de masse volumique au repos μ_0, de coefficient de compressibilité isentropique χ_S, de masse molaire M, de rapport de capacités calorifiques γ, à la température moyenne T_0 et à la pression au repos P_0. On note $\overrightarrow{v} = v(x,t)\overrightarrow{u}_x$ la vitesse de la particule de fluide d'abscisse x au repos à la date t, $\mu = \mu_0 + \mu_1$ et $P = P_0 + p_1(x,t)$ la pression. On néglige les effets de la pesanteur. Une onde incidente plane progressive harmonique venant des $x < 0$ a pour expression $v_i(x,t) = v_0 \cos\left[\omega\left(\frac{x}{c} - t\right)\right]$. Il apparaît une onde réfléchie $v_r = v_{0r} \cos\left[-\omega\left(\frac{x}{c} + t\right) + \varphi_r\right]$ et une onde transmise $v_t = v_{0t} \cos\left[\omega\left(\frac{x}{c} + t\right) + \varphi_t\right]$.

1. Établir l'équation de d'Alembert vérifiée par v ou par p_1. Donner l'expression de la célérité c de l'onde en fonction de χ_S et de μ_0 puis en fonction de γ, R, T_0 et M. Donner la relation entre v et p_1 en définissant l'impédance acoustique.
2. On définit les coefficients de réflexion et de transmission complexes :

$$\underline{r} = \frac{v_{0r} e^{j\varphi_r}}{v_0} \quad \text{et} \quad \underline{t} = \frac{v_{0t} e^{j\varphi_t}}{v_0}$$

   En écrivant les relations de passage en $x = 0$, déterminer les expressions de ces deux coefficients en fonction de $\eta = \frac{2\mu_0 c}{\sigma\omega}$. Préciser la relation entre $\underline{r}$ et $\underline{t}$.
3. On pose $\overrightarrow{\Pi} = p_1 \overrightarrow{v}$. Donner le sens physique de cette grandeur et décrire comment on pourrait faire une bilan énergétique.

Ondes sphériques

Exercice 13 Émission et propagation d'une onde sphérique. Un émetteur sphérique ayant la forme d'une membrane dont le rayon au repos est r_0 produit un son de façon isotrope.

1. Résoudre dans ce cas l'équation de d'Alembert en cherchant une onde sphérique progressive. On pourra raisonner sur la quantité rp_1.
2. Déduire de l'expression de la surpression celle de l'onde de vitesse. L'onde de vitesse est-elle longitudinale ?
3. On prend l'hypothèse simplificatrice $r_0 = \frac{1}{k}$. Quel serait dans ce cas le mouvement de la membrane ? Donner un exemple concret.

Exercice 14 Déterminer le vecteur $\overrightarrow{\Pi}$ pour l'onde sphérique décrite à l'exercice précédent. Montrer que la valeur moyenne de la puissance traversant une surface sphérique concentrique avec la source est indépendante de son rayon r. Commenter ce résultat.

Exercice 15 Une onde plane progressive harmonique de longueur d'onde Λ se propage dans un tuyau cylindrique d'axe (O, x) et de rayon $r_0 \ll \lambda$. L'extrémité E du tuyau est ouverte et met en communication l'air dans le tuyau et l'air dans l'atmosphère à la pression P_0. On admet que la diffraction en E provoque le changement de nature de l'onde et qu'elle devient hémisphérique à l'extérieur.

1. Montrer qu'un tuyau cylindrique d'axe (O, x) peut permettre la propagation d'une onde plane progressive harmonique.
2. En utilisant les résultats des deux exercices précédents, déterminer l'impédance acoustique de l'onde hémisphérique à l'extérieur au voisinage de la sortie du tuyau : on supposera que l'extrémité circulaire du tuyau est assimilable à une source hémisphérique de même rayon (r_0) et on assimilera l'impédance au rapport du module de la surpression complexe par celui de la composante sur $\overrightarrow{u}_r$ de la vitesse complexe.
3. En déduire les valeurs approchées des coefficients de réflexion et de transmission de l'onde de surpression en E : on supposera que les expressions du cours relatives aux ondes planes progressives harmoniques sont généralisables.
4. En déduire la nature de l'onde sonore de surpression dans le tuyau, assimpilée à la superposition de l'onde incidente et de l'onde réfléchie en E. Préciser l'état vibratoire de E.

Éléments d'acoustique

Exercice 16 **Théorie des flûtes**. On pourra admettre le résultat de l'exercice précédent.

1. Un haut-parleur, placé à l'extrémité d'un tube cylindrique, produit des ondes sonores de type onde plane progressive harmonique. On note μ la masse volumique de l'air, c la célérité du son dans l'air et on donne la vitesse imposée par le haut-parleur $\overrightarrow{v}(x = 0, t) = A\cos(\omega t)\overrightarrow{u}_x$. Donner l'expression du champ des vitesses et du champ de surpression dans le tube supposé semi-infini.
2. Si le tube est fermé par une paroi rigide en $x = L$ sur laquelle l'onde se réfléchit totalement, montrer que la fréquence est quantifiée et déterminer le champ des vitesses.
3. Si le tube est ouvert sur l'atmosphère à son extrémité E en $x = L$ sur laquelle l'onde se réfléchit totalement, montrer que la fréquence est quantifiée et déterminer le champ des pressions.
4. Dans une flûte, le souffle fait vibrer une anche qu'on assimile à la source S d'une onde sonore harmonique. Le corps de la flûte est assimilé à un cylindre dont l'extrémité E est ouverte. Avec ses doigts, le flûtiste bouche tous les trous sauf un seul, P. On pose $D = SE$ et $d = SP$. On suppose que l'onde sonore dans le corps de la flûte est stationnaire et que la source S est un ventre de surpression.
   (a) Donner la naturre vibratoire de E et de P.
   (b) En déduire que d et D sont nécessairement en rapport rationnel.
   (c) Calculer la fréquence de l'harmonique (fondamentale) de plus basse fréquence f si $d = 70\text{cm}$ et $D = 90\text{cm}$ (on prend $c = 340\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$).

Exercice 17 **Effet «Donald Duck»**. Un individu aspire une bouffée d'hélium et parle. L'auditeur entend alors une voix anormale, méconnaissable et très aiguë. Expliquer ce phénomène. On pourra utiliser les résultats de l'exercice précédent.

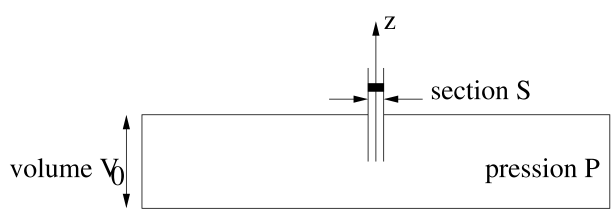
Exercice 18 **Vibration d'une peau de tambour**. On assimile une peau de tambour à un réseau plan (O, x, y) à maille carrée de côté a dont les nœuds sont occupés par des atomes de même masse m. Ceux-ci vibrent perpendiculairement au plan selon l'axe des z. On limite les intercations à celles de ses quatre plus proches voisins : la force de rappel verticale exercée sur un atome K de la part d'un de ses voisins L est proportionnelle à la différence d'altitude entre ses deux atomes, la constante de proportionnalité étant notée C. On néglige les effets de la pesanteur.

1. Soit K l'atome de coordonnées cristallines $K(n,m)$ (il est situé sur la n-ième ligne et la p-ième colonne). On note $z(n,m,t)$ son altitude. Déterminer la force verticale $\overrightarrow{f}(n,m,t) = f(n,m,t)\overrightarrow{u}_z$ subie par l'atome K de la part de ses voisins.
2. On passe du discret au continu : $K(n,m)$ a pour coordonnées cartésiennes $K(x = na, y = ma)$ et on fait les développements limités au second ordre. Donner le développement limité de $z(n+1,m,t)$, $z(n-1,m,t)$, $z(n,m+1,t)$ et $z(n,m-1,t)$ en fonction de $z(n,m,t)$, de ses dérivées $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ et du côté de la maille a.
3. En déduire l'équation bidimensionnelle de d'Alembert vérifiée par z.
4. On donne, en coordonnées cylindriques : $\Delta z = \frac{\partial^2 z}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial z}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 z}{\partial \theta^2}$. On cherche une solution factorisée du type $z = f(r)g(\theta)\cos(\omega t)$.
   (a) Proposer une expression pour $g(\theta)$.
   (b) Établir l'équation différentielle vérifiée par f.
   (c) Donner les conditions aux limites pour f en $r = 0$ et en $r = R$.
   (d) Conclure.

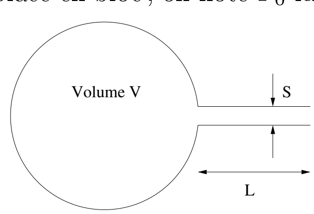
Problèmes divers

Exercice 19 Résonateur de Helmholtz.

1. Préliminaire : **Expérience de Rückhardt**. Un récipient indéformable de volume V_0 contient de l'air initialement à la pression P_0, assimilé à un gaz parfait dont le rapport des capacités calorifiques molaires est $\gamma = \frac{C_{P,m}}{C_{V,m}}$. Il est surmonté d'un tube cylindrique de section S, de volume total très petit devant V_0, dans lequel coulisse sans frottement un petit cylindre métallique de masse m et de même section, assurant ainsi l'étanchéité. La position du cylindre est repérée sur l'axe (O,z) vertical, O correspondant à la position de la bille telle que le volume emprisonné est V_0. On note P la pression instantanée de l'air dans la bouteille, P_0 celle de l'air extérieur et g l'accélération de la pesanteur.



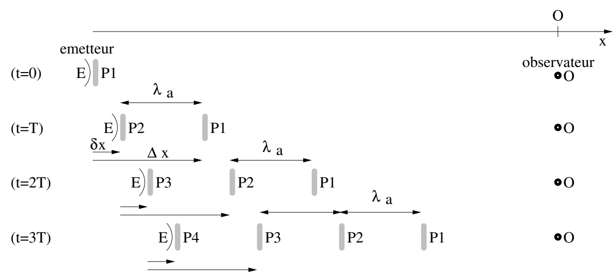
   (a) Donner l'expression du volume instantané de l'air emprisonné V en fonction de V_0, S et z.
   (b) Sous quelles hypothèses peut-on considérer que lors des oscillations verticales du cylindre dans le tube, l'air emprisonné subit une transformation adiabatique réversible ? En déduire dans ce cas qu'on peut écrire $P \simeq P_0 - \frac{P_0\gamma S}{V_0}z$.
   (c) Écrire la deuxième loi de Newton (ou relation fondamentale de la dynamique) pour le cylindre, en déduire l'équation différentielle vérifiée par z.
   (d) En déduire que la mesure de la période θ des petites oscillations permet le calcul de γ.
2. On étudie maintenant un récipient de volume V prolongé par un tuyau horizontal de longueur L et de section S, où l'air se déplace en bloc ; on note P_0 la pression de l'air atmosphérique.



Montrer que ce sustème possède une fréquence de résonance. Expliquer pourquoi «on entend la mer»ăen mettant un coquillage à son oreille.

Exercice 20 Effet Doppler. Un émetteur sonore de fréquence f et de période $T = \frac{1}{f}$ se déplace à la vitesse $\overrightarrow{v} = v\overrightarrow{u}_x$. Un observateur est placé sur l'axe (O, x). On repère sur l'axe la position des pics de surpression. La distance qui les sépare est notée λ. La vitesse du son dans l'air est notée c.

1. On prend $v = 0$. Donner l'expression de λ en fonction de f et de c. Justifier que le son entendu par l'observateur est de fréquence f.
2. On prend $v \neq 0$ et on suppose que l'émetteur est situé en $x < 0$ et vient vers l'observateur. On schématise la position des pics de surpression consécutifs (P1, P2, P3, ...) aux dates $t = 0$, $t = T$, $t = 2T$, $t = 3T$:



   Donner l'expression de la distance δx parcourue par l'émetteur entre l'émission de deux pics consécutifs, celle de la distance Δx parcourue par chaque pic pendant la même durée et en déduire la distance λ_a (longueur d'onde apparente) entre deux pics consécutifs. En déduire la fréquence apparente f_a perçue par l'observateur.
3. Quelle est la vitesse interdite dans la formule établie ? Quel est le phénomène sous-jacent ?
4. Sans refaire le raisonnement, comment peut-on changer la formule donnant la fréquence apparente à l'approche f_a pour trouver la fréquence apparente f_e lorsque l'émetteur s'éloigne à la vitesse v (pour des valeurs positives de x) ?
5. Déduire de ce qui précède ce qu'on entend lorsqu'un émetteur sonore passe dans la rue.
6. Expliquer le décalage vers le rouge des étoiles lointaines.
7. Un policier de la route possédant une excellente oreille entend arriver une moto avec un moteur monocylindre, il reconnaît un la 2 de fréquence $f_a = 110$Hz, puis l'entend s'éloigner en reconnaissant un sol 2, de fréquence $f_e = 92$Hz. Déterminer la vitesse et le régime moteur (exprimé en tr/min), et en déduire si le motard est verbalisable, la vitesse étant limitée à 110km/h.

Exercice 21 Critère de Mach. un obstacle infini selon (O, z) est plongé dans un fluide ; loin de cet obstacle, la vitesse $v_0\overrightarrow{u}_x$, la pression P_0 et la masse volumique μ_0 sont uniformes. Les champs étudiés sont : vitesse $\overrightarrow{v} = v_0\overrightarrow{u}_x + [v_1(x, y)\overrightarrow{u}_x + v_2(x, y)\overrightarrow{u}_y]$, pression $p = P_0 + p_1(x, y)$ et masse volumique $\mu = \mu_0 + \mu_1(x, y)$. On se place dans l'approximation acoustique.

1. Linéariser l'équation de conservation de la masse et l'équation d'évolution isentropique.
2. On note $c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \chi_S}}$ la vitesse du son et $\mathcal{M} = \frac{v_0}{c}$ le *nombre de Mach*. Montrer que
$$\frac{\partial v_1}{\partial x} + (1 - \mathcal{M}^2)\frac{\partial v_2}{\partial x}$$
3. À quel condition l'écoulement peut-il être considéré comme incompressible ?

Exercice 22 Tuyau d'orgue de section carrée. Un tuyau d'orgue a une section carrée : $(y, z) \in [0, a] \times [0, a]$. On étudie la propagation d'ondes acoustiques de champ de pressions $\underline{p}_1(x, y, z, t) = f(y)g(z)e^{j(\omega t - kx)}$.

1. Est-ce une onde plane ?
2. Quelles sont les conditions aux limites sur les parois ?
3. En déduire les expressions possibles des fonctions f et g.
4. Montrer que les lois de la mécanique des fluides conduisent à la relation suivante, dite relation de dispersion :
$$\frac{\omega^2}{c^2} = k^2 + \frac{\pi^2}{a^2}(m^2 + n^2), \quad (m, n) \in \mathbb{N}^2$$

5. Pour un tuyau d'orgue de longueur L, à quelle condition le son est-il *harmonieux*, c'est-à-dire est-il composé de multiples entiers d'une fréquence donnée (la bande passante de l'oreille humaine est $[15\text{Hz}, 15k\text{Hz}]$).

Exercice 23 Onde de choc (extrait de la feuille d'exercices de mécanique des fluides). Un fluide parfait compressible est initialement en écoulement incompressible uniforme et stationnaire (masse volumique μ_0, vitesse $\vec{v}_0 = v_0\vec{u}_x$) dans une canalisation horizontale cylindrique infinie, de section S. À la date $t = 0$, on ferme brutalement l'extrémité de la canalisation en $x = 0$ et on étudie le régime transitoire de l'écoulement pour $x < 0$. On étudie un modèle simple dans lequel le fluide est séparé en deux par une surface fictive d'abscisse ξ qui se déplace à vitesse constante $\vec{c} = -c\vec{u}_x$ (c est appelée la célérité de l'onde de choc) avec $c \gg v_0$. À tout instant :

- à gauche de la surface fictive, pour $x \leq \xi$, le fluide se déplace encore à la vitesse $\vec{v} = \vec{v}_0$ et $\mu = \mu_0$, on note P_0 la pression et s_0 l'entropie massique ; la perturbation n'est pas encore arrivée ;
- à droite de la surface fictive, pour $\xi < x \leq 0$, le fluide s'est immobilisé $\vec{v} = \vec{0}$ et on pose $\mu = \mu_0 + \delta\mu$ avec $\delta\mu \ll \mu_0$, on note P_1 la pression et s_1 l'entropie massique.

1. Faire un schéma dans le référentiel galiléen du laboratoire, $\mathcal{R}_0$, faisant apparaître la surface fictive et les différentes vitesses de déplacement.
2. On note $\mathcal{R}^*$ le référentiel en translation uniforme par rapport à $\mathcal{R}_0$ dans lequel la surface fictive est immobile. On travaille sur un système fermé de fluide se répartissant de part et d'autre de la surface. Préciser les vitesses des deux surfaces délimitant le système (indiquées en pointillés sur le schéma) dans $\mathcal{R}^*$. En déduire les deux distances d'avancement $(v_0 + c)dt$ et cdt indiquées sur le schéma.
3. Par un bilan de masse, justifier l'équation (i) $\mu_0 v_0 = c\delta\mu$.
4. Par un bilan de quantité de mouvement, justifier l'équation (ii) $(\mu_0 + \delta\mu)c^2 - \mu_0(v_0 + c)^2 = P_0 - P_1$.
5. Par un bilan d'entropie, justifier l'équation $(\mu_0+\delta\mu)Scdts_1 - \mu_0 S(v_0+c)dts_0 = 0$. En déduire que l'écoulement est isentropique.
6. On note $\chi_S = \frac{1}{\mu}\left(\frac{\partial\mu}{\partial P}\right)_S$ le coefficient de compressibilité isentropique du fluide, supposé constant et uniforme. En intégrant et en effectuant un développement limité, justifier l'équation (iii) $\delta\mu = \mu_0\chi_S(P_1 - P_0)$.
7. En déduire l'expression de c en fonction de μ_0 et χ_S.
8. Combien vaut c dans le cas d'un gaz parfait diatomique ($\gamma \simeq \frac{7}{5}$) de masse molaire $M = 29\text{g} \cdot \text{mol}^{-1}$ à la température $T = 300\text{K}$?