# Feuille d'exercices numéro 6

Induction

PC, 27 novembre 2008

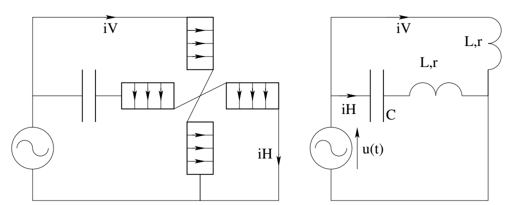
On donne $\varepsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12}\mathrm{F} \cdot \mathrm{m}^{-1}$ et $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}\mathrm{H} \cdot \mathrm{m}^{-1}$.

## Circuit fixe dans un champ variable

**Exercice 1 Boucle circulaire**. Le plan $(O, x, y)$ est horizontal, l'axe $(O, z)$ est vertical. Un circuit circulaire de centre $O$, d'axe $(O, y)$ et de rayon $r$ est plongé dans un champ magnétique créé par une source extérieure de champ magnétique $\overrightarrow{B}$.

1. On donne $\overrightarrow{B} = B_0 \left(1 + \frac{t}{\tau}\right) \overrightarrow{u}_y$.
   (a) Déterminer la force électromotrice d'induction $e(t)$.
   (b) Le circuit est formé d'un matériau de résistance linéique $\lambda$. Déterminer l'intensité $i(t)$ du courant induit dans le circuit, le champ magnétique induit créé au centre du cercle. En déduire la condition de validité du calcul effectué.
2. On donne maintenant $\overrightarrow{B} = B_0 \cos(\omega t)\overrightarrow{u}_y$. Préciser quelle peut être la source de ce champ et déterminer $e(t)$.
3. On donne enfin $\overrightarrow{B} = B_0 \left(\cos(\omega t)\overrightarrow{u}_x + \sin(\omega t)\overrightarrow{u}_y\right)$. Préciser quelle peut être la source de ce champ et déterminer $e(t)$.

**Exercice 2 Production d'un champ magnétique tournant**.
Un système de deux paires de demi-bobines d'inductance $\frac{L}{2}$ et de résistance $\frac{r}{2}$ est placé sur deux axes perpendiculaires, elles sont alimentées par une source unique de tension alternative sinusoïdale $u(t) = U_0 \cos(\omega t)$. On place un condensateur de capacité $C$ dans la branche de la paire de bobines créant le champ magnétique horizontal.




Établir la relation entre $r$, $L$ et $\omega$ et la valeur de la capacité $C$ permettant de crée un champ magnétique tournant à la vitesse angulaire $\omega$ au centre du dispositif des deux paires de demi-bobines.

**Exercice 3 Antenne à champ magnétique**. Un cadre rectangulaire a pour côtés $a$ selon $x$ et $b$ selon $y$. Il comporte $N$ spires. Il est soumis à un champ magnétique dépendant de l'espace et du temps :

$$\overrightarrow{B} = B_0 \overrightarrow{u}_z \cos\left[2\pi f \left(t - \frac{x}{c_0}\right)\right]$$

où $B_0$ est l'amplitude du champ, $f$ la fréquence et $c_0$ la célérité de la lumière.

1. Faire un schéma.
2. Déterminer le flux $\Phi(t)$ du champ magnétique à travers le cadre à la date $t$. On l'écrira sous la forme d'un produit.
3. En déduire la fém d'induction $e(t)$ et donner sa valeur efficace $E$.
4. Comment doit-on choisir $a$ et $b$ pour que $E$ soit maximale ?

## Auto et mutuelle induction

**Exercice 4 Calcul d'une inductance**. Une bobine est formée de l'enroulement d'un fil de diamètre $d$ sur un cylindre de rayon $r_0 \gg d$ d'axe $(O, z)$ et de longueur $h \gg r_0$. Pourquoi le fil doit-il être gainé ou vernis ? On assimile le champ magnétique à celui créé par un solénoïde infini (on néglige les effets de bord). Calculer le flux d'auto-induction et donner l'expression de l'inductance de la bobine. Décrire le champ magnétique créé par le solénoïde si le bobinage a été mal fait et que le fil fait un angle $\alpha$ avec le plan perpendiculaire à l'axe.

**Exercice 5 Spire placée dans un solénoïde**.

1. Un solénoïde de longueur $D = 50,0\text{cm}$ mais assimilé à un solénoïde infini possède $n_1 = 4000$ spires par mètre, est de rayon $r_1 = 1,50\text{cm}$ et est parcouru par un courant d'intensité $i_1$.
   (a) Rappeler l'expression du champ $\overrightarrow{B}_1$ et donner deux méthodes permettant de la démontrer.
   (b) On isole par la pensée une spire : exprimer le flux du champ magnétique du solénoïde à travers cette spire, puis le flux propre total. En déduire l'expression littérale et la valeur numérique de l'inductance propre $L_1$.
2. On place à l'intérieur une bobine plate comportant $N_2 = 50$ spires de rayon $r_2 = 1,00\text{cm}$, parcourue par un courant d'intensité $i_2$.
   (a) Calculer le flux du champ du solénoïde à travers la bobine.
   (b) En déduire l'expression littérale et la valeur numérique de l'inductance mutuelle $M$.
   (c) On suppose que la spire est fermée sur un résistor de résistance $R$, et le solénoïde alimenté par un générateur de tension sinusoïdale $u(t) = e\cos(\omega t)$. On note $L_2$ l'inductance de la spire. Établir les équations différentielles vérifiées par les intensités $i_1$ dans le solénoïde et $i_2$ dans la spire. Expliquer pourquoi un régime sinusoïdal forcé est possible.
   (d) Le solénoïde est alimenté par une source sinusoïdale de tension, la résistance du bobinage est $R_1$, celle de la spire plate $R_2$, on néglige l'auto-inductance de spire et elle est fermée sur un condensateur de capacité $C$. Modéliser le circuit et le mettre en équations.

**Exercice 6 Bobinages**. Avec un fil de diamètre $d$, on réalise un bobinage cylindrique de rayon $r \gg d$ sur une longueur totale $h$. Avec le même fil, on effectue un bobinage sur le premier solénoïde, de même rayon et de même longueur, mais en effectuant deux tours. On dispose ainsi de deux solénoïdes superposés, de rayons et de longueurs sensiblement égales, le second comportant deux fois plus de spires par mètre que le premier. Le second est fermé sur un résistor de résistance $R$, le premier alimenté par un générateur sinusoïdal de tension $u(t) = U_0\cos(\omega t)$. On néglige les effets de bord ; on pose $L = \frac{\mu_0 \pi r_0^2 h}{d^2}$ et on suppose que $R = 4L\omega$.

1. Établir les expressions des inductances $L_1$ et $L_2$ et du coefficient de mutuelle induction $M$.
2. En déduire les équations différentielles liant $i_1$ et $i_2$, et déterminer leurs expressions en régime sinusoïdal forcé.

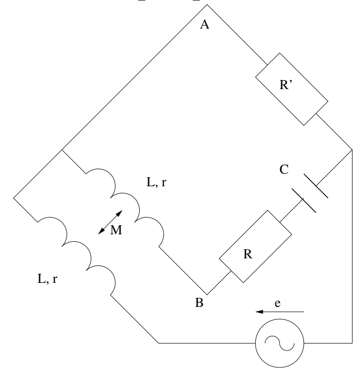
**Exercice 7** Une spire plate circulaire de rayon $R$ comporte $N$ tours et est parcourue par un courant d'intensité $i$. Un solénoïde semi-infini d'extrémité $E$ de rayon $r$ comporte $n$ spires par mètre et est parcouru par un courant d'intensité $I$. La spire est placée dans le plan d'extrémité du solénoïde, ils sont coaxiaux et $E$ est confondu avec le centre de la spire.

1. Rappeler l'expression du champ $\overrightarrow{B}_{sp}$ créé par la spire en un point sur son axe.
2. Rappeler l'expression du champ $\overrightarrow{B}_{so}$ créé par le solénoïde en un point sur son axe.
3. On suppose que $r \ll R$. Faire un schéma. Déterminer la mutuelle inductance $M$.
4. On suppose que $R \ll r$. Faire un schéma. Déterminer la mutuelle inductance $M$.

**Exercice 8** Deux circuits d'inductances $L_1$ et $L_2$, de résistances $R_1$ et $R_2$ sont couplés par une mutuelle inductance $M$. Ils sont alimentés par des échelons de tension $0 \to E_1$ et $0 \to E_2$ respectivement. Écrire les deux équations électriques. En déduire le bilan énergétique entre les dates 0 et $t$ et l'expression de l'énergie d'interaction. Préciser la nature de cette interaction.

**Exercice 9** **Mesure d'un coefficient d'induction mutuelle par pont.**

Dans le circuit suivant, on note $M$ le coefficient d'induction mutuelle entre les deux bobines identiques d'inductance $L$ et de résistance interne $r$. Le pont est équilibré quand un ampèremètre branché entre $A$ et $B$ donne une intensité nulle, ou quand les potentiels en $A$ et en $B$ sont égaux. Donner une relation entre $L$, $r$, $C$, $R$ et $R'$ et une expression de $M$ en fonction de ces données. A. N. : $L = 36$ mH, $r = 5\Omega$, $R' = 1k\Omega$, $C = 0,8\mu F$ et $R = 8k\Omega$.




**Exercice 10** **Étude numérique de l'établissement du courant.** Une bobine idéale (1) d'inductance $L_1 = L = 1,00$mH est couplée avec une bobine idéale (2) d'inductance $L_2 = 5L = 5,00$mH ; le coefficient de mutuelle inductance est $M = 2L = 2,00$mH. (1) est alimentée par un générateur de Thévenin de force électromotrice $E_1 = E = 15,0$V et de résistance $R_1 = R = 100\Omega$. (2) est fermée sur un résistor de résistance $R_2 = R = 100\Omega$. On pose $\tau = \frac{L}{R}$. On note $i_1$ et $i_2$ les intensités des courants traversant respectivement (1) et (2) ; elles sont nulles à $t = 0$.

1. Établir le système d'équations différentielles couplées vérifiées par $i_1$ et $i_2$.
2. Calculer numériquement les valeurs initiales $\frac{di_1}{dt}(t=0)$ et $\frac{di_2}{dt}(t=0)$.
3. Établir, en expressions littérales, le bilan de puissance du circuit, en faisant apparaître la puissance fournie par le générateur, les puissances magnétiques propres et d'interaction et les puissances Joule.
4. En éliminant $i_1$, établir l'équation différentielle du second ordre vérifiée par $i_2$ et calculer numériquement ses coefficients.
5. Résoudre l'équation différentielle sans chercher à déterminer les constantes d'intégration et donner les expressions de $i_1(t)$ et $i_2(t)$.

# Circuit mobile

**Exercice 11** **Spire carrée dans champ uniforme.** Une spire plate carrée de côté $a$ se déplace dans un plan vertical $(O, x, z)$ selon un mouvement de translation à la vitesse $\overrightarrow{v} = \dot{z}\overrightarrow{u}_z$. Le côté inférieur (horizontal) est à la cote $z_i = z$, le côté supérieur (horizontal) à la cote $z_s = z + a$. Un champ magnétique uniforme $\overrightarrow{B} = B_0\overrightarrow{u}_y$ (horizontal et perpendiculaire au plan de la spire) règne dans le demi-espace $z < 0$.

1. Déterminer la force électromotrice d'induction créée dans la spire en fonction de $z$ et de $\dot{z}$ en utilisant les deux méthodes du cours.
2. La spire est formée d'un fil de masse linéique $\mu$ et de résistance linéique $\lambda$. Elle est lâchée sans vitesse initiale de la cote ($z_i = 0, z_s = a$). On néglige tout phénomène d'auto-induction. Déterminer les expressions de l'intensité $i(t)$ et de la cote $z(t)$ lorsque $-a \leq z \leq 0$.

**Exercice 12** **Principe de l'alternateur.** Un solénoïde idéal comportant $n$ spires par mètre est alimenté par un générateur idéal de courant d'intensité $I_0$. Une spire plate circulaire de rayon $r$, comportant $N$ tours de fil, est animée d'un mouvement circulaire à vitesse angulaire constante $\omega$ autour de son diamètre vertical fixe $(O, z)$ et perpendiculaire à l'axe $(O, x)$ du solénoïde.

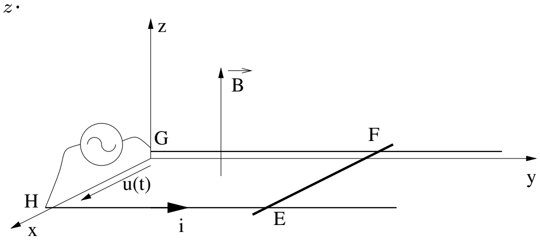
1. Déterminer la force électromotrice d'induction dans la spire.

2. La spire est fermée sur un résistor de résistance $R$. On néglige tout phénomène d'auto-induction. Déterminer l'intensité $i(t)$ du courant induit. Le mouvement de rotation de la spire est imprimé par la rotation d'une turbine entraînée par le vent. Expliquer qualitativement pourquoi le fait de débiter un courant dans le résistor provoque un couple mécanique résistant susceptible de ralentir (voire d'arrêter) la rotation de la spire.

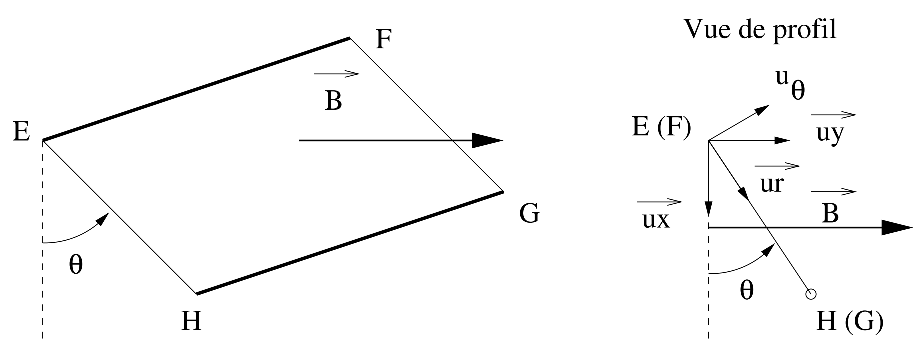
**Exercice 13 Puissance mécanique consommée par un alternateur monophasé**. Une spire carrée $(EFGH)$ de côté $a$, orientée, de vecteur normal $\overrightarrow{n}$, alimentant un résistor de résistance $R$, est mobile autour de son axe vertical $\Delta$ passant par les milieux des côtés opposés horizontaux $[E,F]$ et $[H,G]$. Elle est placée dans un champ magnétique uniforme, constant et horizontal $\overrightarrow{B} = B\overrightarrow{u}_x$. On pose $\theta = (\widehat{\overrightarrow{u}_x, \overrightarrow{n}})$. La spire tourne autour de $\Delta$ à la vitesse angulaire constante $\omega = \dot{\theta}$. Déterminer la puissance moyenne des forces de Laplace qui s'exercent sur les côtés de la spire. On néglige tout phénomène d'auto-induction.

**Exercice 14 Couplage électromécanique**. Dans le plan horizontal $(O,x,y)$, à partir des points $G(0,0,0)$ et $H(d,0,0)$, sont tendus deux rails conducteurs parallèles à $\overrightarrow{u}_y$. Entre $G$ et $H$ est branché un générateur basse fréquence imposant une tension $u_{HG} = U_0\cos(\omega t)$. Une tige $EF$ de masse $m$, horizontale, de largeur $d$, glisse en restant au contact des rails et parallèle à $\overrightarrow{u}_x$ ; sa position est repérée par son ordonnée $y$ et elle subit une force de frottement $\overrightarrow{f} = -\lambda\overrightarrow{v}$. La tige présente une résistance $R$ au passage du courant. Le circuit rectangulaire est plongé dans un champ magnétique uniforme et constant $\overrightarrow{B} = B\overrightarrow{u}_z$.

On néglige tout phénomène d'auto-induction. Établir les équations différentielles liant $i$ et $y$. Faire un bilan de puissance instantanée. Déterminer l'amplitude $Y$ des oscillations mécaniques de la tige en régime sinusoïdal forcé.




**Exercice 15 Balancement d'une tige dans un champ magnétique** Dans le dispositif suivant, $EF$ est une tige horizontale fixe et parfaitement conductrice, $FG$ et $HF$ sont deux fils rigides de masse nulle parfaitement conducteurs et $GH$ est une tige conductrice de résistance $r = 100\Omega$ et de masse $m = 100$g, libre de se balancer ; on note $i$ l'intensité circulant dans le circuit carré de côté $a = 10,0$cm, $\overrightarrow{g} = g\overrightarrow{u}_x$ avec $g = 9,81\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$ le champ de pesanteur et on repère l'angle $\theta$ d'inclinaison des fils par rapport à la verticale. L'ensemble est plongé dans un champ magnétique uniforme et constant horizontal $\overrightarrow{B} = B\overrightarrow{u}_y$ avec $B = 120$mT.




1. Montrer que la force électromotrice d'induction dans le circuit se ramène à celle dans HG. En déduire une équation différentielle vérifiée par $\theta$ et $i$.
2. Par application de la deuxième loi de Newton sur la tige, établir une seconde équation différentielle vérifiée par $\theta$ et $i$.
3. Faire un bilan énergétique.
4. On se place dans le cas des petits angles. On abandonne la tige sans vitesse initiale avec un angle $\theta_0 = 0,100$rad.

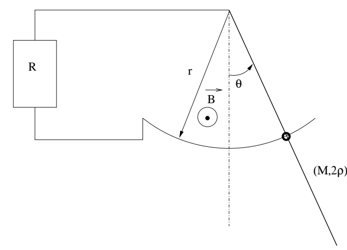
(a) Déterminer l'expression de $\theta(t)$ en négligeant les termes du second ordre.

(b) Calculer numériquement la période des oscillations dans ce cas.

(c) On admet que l'expression de $\theta(t)$ est exacte pendant quelques périodes et que $\sin\theta \simeq \theta$ reste vrai. En déduire $i(t)$ et calculer numériquement l'intensité maximale circulant dans le circuit.

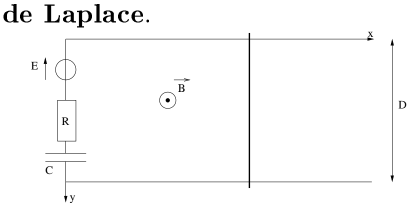
**Exercice 16 Pendule pesant et induction**.

Dans le circuit suivant, établir les équations du mouvement de la tige de longueur $L = 2r$ et de masse $M$. On rappelle que $J_G = \frac{1}{12}ML^2$.

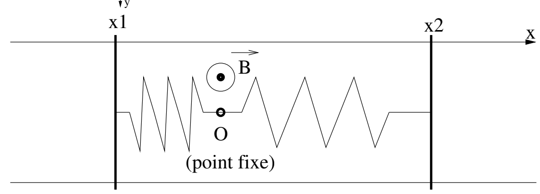



**Exercice 17 Variations sur le thème du rail de Laplace**.

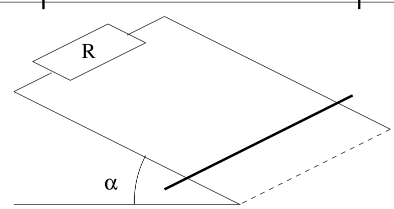
1. Dans le premier montage, la tige est de masse $M$ et de résistance nulle. Étudier $i(t)$ et $x(t)$.




2. Dans le deuxième montage, les deux tiges ont même masse $M$, même résistance $\frac{R}{2}$, les ressorts ont même longueur à vide $\ell_0$, même constante de raideur $k$, et à $t = 0$, le ressort 1 a pour longueur $\frac{\ell_0}{2}$ tandis que le ressort 2 n'est pas tendu, leurs vitesses initiales étant nulles. Étudier $x_1(t)$ et $x_2(t)$.




3. Dans le troisième montage, la tige est de masse $M$ et de résistance nulle, elle glisse sans frottement sur le plan incliné d'un angle $\alpha$ par rapport à l'horizontale. Étudier $i(t)$ et $x(t)$.




**Exercice 18 Cylindres tournant**. Un cylinde métallique, de conductivité $\gamma$, de hauteur $h$ et de rayon $R$, tourne autour de son axe $(O, z)$ à la vitesse angulaire $\overrightarrow{\Omega} = \Omega\overrightarrow{u}_z$. Initialement, la densité de charge volumique et surfacique est uniformément nulle. Les porteurs de charge sont les électrons, de masse $m = 9,11 \cdot 10^{-31}$kg et de charge $-e = -1,6 \cdot 10^{-19}$C.

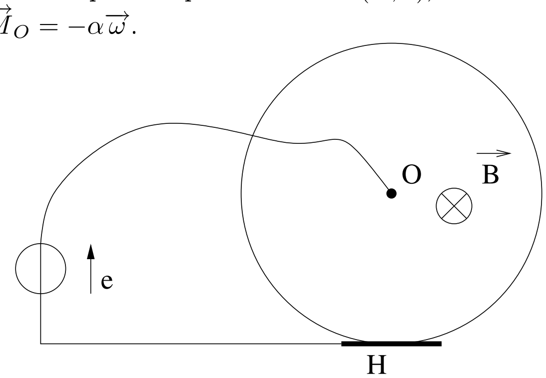
1. Le système est placé dans un champ magnétique uniforme et constant $\overrightarrow{B} = B_0\overrightarrow{u}_z$. On travaille dans le référentiel galiléen du laboratoire et on se place en régime permanent : $\overrightarrow{v} = r\Omega\overrightarrow{u}_\theta$. On négligera le champ magnétique créé par les charges en mouvement devant le champ magnétique $\overrightarrow{B}_0$.
   (a) Ecrire la deuxième loi de Newton pour un électron.
   (b) Justifier que le terme $ma$ est négligeable devant la force de Lorentz.
   (c) En déduire l'existence et l'expression du champ électrique $\overrightarrow{E}$ dans le cylindre.
   (d) En déduire la densité volumique de charge $\rho$ et justifier l'existence d'une charge surfacique $\sigma$ dont on donnera l'expression.
2. Le système est placé dans un champ magnétique uniforme et variable $\overrightarrow{B} = B_0\cos(\omega t)\overrightarrow{u}_z$.
   (a) Ecrire la loi d'Ohm généralisée.
   (b) On note $\rho$ la densité volumique de charge. Ecrire la loi de conservation de la charge et en déduire l'équation différentielle vérifiée par $\rho$.
   (c) Donner l'expression de $\rho$ en régime forcé.

**Exercice 19 Lévitation magnétique**. Une grande spire plate de centre $O$, d'axe $(O, z)$ et de rayon $R_0$, placée à l'horizontale, est alimentée par un générateur de courant d'intensité $I$ qu'on allume à $t = 0$. Une petite spire de rayon $a \ll R$, de masse $m$, de centre $C$, est astreinte à se déplacer sans frottement de façon coaxiale : $O'$ se déplace sur la droite $(O, z)$, elle reste parallèle à la grande spire (son axe de révolution est donc aussi $(O, z)$) et on note $z = OO'$. On veut montrer que la petite spire peut rester en lévitation au dessus de la grande.

1. **Préliminaire**. On pose $\overrightarrow{B} = B_r(r, z)\overrightarrow{u}_r + B_z(r, z)\overrightarrow{u}_z$.
   (a) Rappeler le champ magnétique $\overrightarrow{B}(0, z)$ créé par la grande spire en $C$, l'exprimer en fonction de $z$.
   (b) On définit autour de $C$ un petit cylindre, d'axe $(O, z)$, de rayon $r \ll R$ et délimité par deux disques de cotes respectives $z$ et $z + dz$. On suppose que le champ magnétique possède une de ses deux composantes sensiblement uniforme :
   – sur le disque de cote $z$ : $\overrightarrow{B} \simeq B_r\overrightarrow{u}_r + B_z(0, z)\overrightarrow{u}_z$ ;
   – sur le disque de cote $z + dz$ : $\overrightarrow{B} \simeq B_r\overrightarrow{u}_r + B_z(0, z + dz)\overrightarrow{u}_z$ ;
   – sur la paroi latérale de rayon $r$ : $\overrightarrow{B} \simeq B_r(r, z)\overrightarrow{u}_r + B_z\overrightarrow{u}_z$.
   Montrer que $B_r(r, z) = -\frac{\pi r^2}{2\pi r}\frac{\partial B_z}{\partial z}$.
   (c) En déduire le champ magnétique s'exerçant en un point de la petite spire $\overrightarrow{B}(a, z)$.
2. **Lévitation à la fermeture : étude qualitative**. L'interrupteur est fermé à la date $t = 0$, le courant dans la grande spire augmente donc brutalement et le champ magnétique dans la petite spire passe donc de $\overrightarrow{0}$ à la valeur déterminée dans le préliminaire.
   (a) Par application de la loi de Lenz, déterminer le sens du courant induit dans la petite spire.
   (b) En considérant les forces de Laplace s'exerçant sur chaque tronçon de la petite spire, en déduire que la petite spire est projetée vers le haut.
3. **Lévitation sous l'action d'un champ magnétique variable**. On considère dans cette question que la grande spire est alimentée par un courant sinusoïdal : $I(t) = I_0 \cos(\omega t)$. On note $R$ la résistance de la petite spire. On suppose que la petite spire est en équilibre de lévitation à la cote $z$ pratiquement constante : on pourra donc considérer que la composante verticale $B_z$ du champ magnétique est quasiment uniforme et on la notera $B_z(t) = B_0 \cos(\omega t)$.
   (a) On néglige l'inductance $L$ de la petite spire. Déterminer l'intensité $i(t)$ dans la petite spire, en déduire l'expression de la résultante des forces de Laplace $\overrightarrow{F}_L(t)$, sa valeur moyenne dans le temps et dire si la lévitation est possible.
   (b) On ne néglige plus $L$ mais on suppose que $L\omega \ll R$. Etablir l'équation diférentielle vérifiée par $i(t)$, montrer qu'elle admet la solution approchée $i(t) = I \sin(\omega t - \varphi)$ avec $\varphi = \frac{L\omega}{R}$, en déduire l'expression de la résultante des forces de Laplace $\overrightarrow{F}_L(t)$, sa valeur moyenne dans le temps et dire si la lévitation est possible.

**Exercice 20 Roue de Barlow**. La roue de Barlow est un disque métallique de masse $M$, de rayon $R_0$, libre de tourner autour d'un axe horizontal passant par son centre $(O, z)$, subissant un couple de frottement fluide de moment en $O$ $\overrightarrow{M}_O = -\alpha\overrightarrow{\omega}$.

Un fil électrique l'alimente en son centre $O$, et un collecteur récupère le courant au point $H$ à la base du disque. Le rayon vertical $[OH]$ forme donc l'équivalent d'un barreau, on note $R$ sa résistance, et le circuit est fermé en plaçant un générateur de tension de force électromotrice $e$ entre $H$ et $O$. Un dispositif extérieur impose un champ magnétique uniforme et constant perpendiculaire à l'axe du disque $\overrightarrow{B} = -B_0\overrightarrow{u}_z$.




Déterminer la vitesse de rotation de la roue en régime permanent. Faire un bilan énergétique.

## Haut-parleur électrodynamique

.

**Exercice 21 Question technique**. Peut-on appliquer la loi de Faraday pour obtenir l'équation électrique du haut-parleur électrodynamique ?

**Exercice 22 Haut-parleur électrodynamique**. Avec les notations du cours, on donne les caractéristiques d'un haut-parleur électrodynamique : pour un son sinusoïdal de fréquence $f =$ 100Hz, $\mathcal{P}_{\text{acoustique}_{\text{moyenne}}} = 30\text{W}$, $\mathcal{P}_{\text{électrique}_{\text{moyenne}}} = 45\text{W}$, $L = 1\text{mH}$, $R = 5\Omega$, $k = 100\text{N} \cdot \text{m}^{-1}$, $m = 5\text{g}$ et $\lambda = 10\text{kg} \cdot \text{s}^{-1}$. Déterminer numériquement le rendement $\eta$, les puissances maximales magnétique, cinétique et élastique.

**Exercice 23 Calcul numérique des caractéristiques d'un haut-parleur** Soit $u(t)$ la tension d'alimentation d'un haut-parleur, $i(t)$ l'intensité circulant dans le bobinage circulaire, $R$ sa résistance, $L$ son inductance, $N$ le nombre de tours et $r$ son rayon, $B$ la norme du champ magnétique toroïdal ; la membrane est solidaire du bobinage, on note $m$ la masse de cet équipage, $x$ son abscisse repérée à partir de la position de repos, $v(t) = \dot{x}$ sa vitesse, $k$ la constante de raideur du ressort modélisant le rappel de la membrane et $\lambda$ le coefficient de frottement fluide linéaire exercé par l'air sur la membrane.

1. On donne les deux bilans énergétiques :
   – électrique : $u(t)i(t) = Ri^2 + \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}Li^2\right) + (-BN2\pi ri(t))$
   – mécanique : $-BN2\pi ri(t) = -\lambda v^2 + \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2\right) + \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}kx^2\right)$.
   Commenter ces deux relations et nommer les différents termes.
2. On se place en régime sinusoïdal forcé. Montrer que le bilan énergétique général du haut parleur peut s'écrire, en valeurs moyennes, sous la forme simplifiée $<\mathcal{P}_{\text{source}}>=<\mathcal{P}_{\text{Joule}}> + <\mathcal{P}_{\text{frottements}}>$.
3. En déduire que le rendement du haut parleur est $\eta = \frac{<\lambda v^2>}{<\lambda v^2>+<Ri^2>}$.
4. On donne les caractéristiques mesurées pour un haut-parleur électrodynamique donné : pour un son sinusoïdal de fréquence $f = 100\text{Hz}$, $\mathcal{P}_{\text{acoustique}_{\text{moyenne}}} = 30\text{W}$, $\mathcal{P}_{\text{électrique}_{\text{moyenne}}} = 45\text{W}$, $L = 1\text{mH}$, $R = 5\Omega$, $k = 100\text{N}\cdot\text{m}^{-1}$, $m = 5\text{g}$ et $\lambda = 10\text{kg}\cdot\text{s}^{-1}$. Déterminer numériquement le rendement $\eta$, les puissances maximales magnétique, cinétique et élastique.

**Exercice 24 Moteur électrique**. Un moteur est constitué d'un stator fixe créant dans le voisinage de $O$ un champ magnétique uniforme tournant (voir exercice du début de cette feuille) $\overrightarrow{B} = B_0(\cos(\omega_0 t)\overrightarrow{u}_x + \sin(\omega_0 t)\overrightarrow{u}_y)$. Le rotor est assimilé à une spire circulaire de rayon $r$ tournant à la vitesse angulaire constante $\omega$ autour de l'axe $(O, z)$, de vecteur normal $\overrightarrow{n}$. On pose $\alpha(t) = (\overrightarrow{u}_x, \overrightarrow{n}) = \omega t + \alpha_0$. On désigne par $i$ le courant induit dans la spire. On étudie le régime permanent. La résistance de la spire est notée $R$, son inductance $L$.

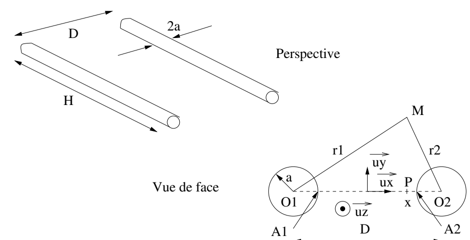
1. Calculer le flux de $\overrightarrow{B}$ à travers la spire.
2. Calculer la fém d'induction, donner le schéma équivalent de la spire, établir l'équation différentielle vérifiée par $i$.
3. On pose $\Omega = \omega_0 - \omega$. Résoudre l'équation différentielle en régime forcé. Donner un ordre de grandeur de la durée du régime transitoire.
4. Calculer le couple des forces de Laplace $\overrightarrow{\Gamma} = \overrightarrow{\mathcal{M}} \wedge \overrightarrow{B}$ sur la spire, donner sa valeur moyenne et conclure.

## Relation entre capacité et inductance linéïque

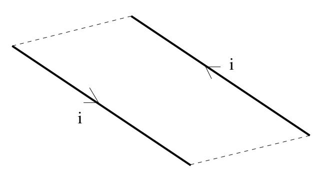
**Exercice 25 Cable coaxial**. Un cable coaxial est constitué de deux cylindres minces coaxiaux, d'axe $(O, z)$ de rayons $a$ et $b$ ($a < b$) et de longueur suffisamment grande pour pouvoir négliger les effets de bord et considérer qu'ils sont infinis. On raisonne sur une longueur $H$ de cable, on note $C$ sa capacité, $L$ son inductance et on pose $\Gamma = \frac{C}{H}$ sa capacité linéïque (en $F \cdot \text{m}^{-1}$) et $\Lambda = \frac{L}{H}$ son inductance linéïque (en $\text{H} \cdot \text{m}^{-1}$).

1. La portion de cable porte une charge $q$ sur le cylindre de rayon $a$, $-q$ sur celui de rayon $b$. On note $U = V(a) - V(b)$ la tension aux bornes du condensateur. Soit $M$ un point à la distance $r \in [a, b]$ de l'axe. Déterminer le champ électrique en $M$, en déduire (en intégrant entre $r = a$ăet $r = b$) la relation entre $U$ et $q$ puis la capacité $C$ de la portion de cable. Montrer enfin que $\Gamma = \frac{2\pi\varepsilon_0}{\ln \frac{a}{b}}$.
2. Un courant constant $i$ monte dans le cylindre de rayon $a$ et descend dans celui de rayon $b$. Soit $M$ un point à la distance $r \in [a, b]$ de l'axe. Déterminer le champ magnétique en $M$, en déduire en intégrant sur le volume l'énergie magnétique emmagasinée entre les deux cylindres, et en l'identifiant à la formule classique, en déduire l'inductance $L$ de la portion de cable. Montrer enfin que $\Lambda = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \frac{a}{b}$.
3. Calculer $\frac{1}{\sqrt{\Lambda\Gamma}}$

**Exercice 26 Ligne bifilaire.**
Une ligne bifilaire est constituée de deux fils parallèles de rayon $a$, d'axes $\Delta_1$ et $\Delta_2$, distants de $D \gg a$, de longueur suffisamment grande pour pouvoir négliger les effets de bord et considérer qu'ils sont infinis. On raisonne sur une longueur $H$ de cable, on note $C$ sa capacité, $L$ son inductance et on pose $\Gamma = \frac{C}{H}$ sa capacité linéïque (en $F \cdot \mathrm{m}^{-1}$) et $\Lambda = \frac{L}{H}$ son inductance linéïque (en $\mathrm{H} \cdot \mathrm{m}^{-1}$).




1. Le courant $i$ constant circule dans le conducteur de gauche dans le sens de $\overrightarrow{u}_z$ et repart dans celui de droite dans le sens de $-\overrightarrow{u}_z$. On délimite ainsi un circuit rectangulaire.




   (a) Soit $M$ un point de l'espace. Déterminer les normesădes champs $\overrightarrow{B}_1$ créé par le fil de gauche et $\overrightarrow{B}_2$ créé par le fil de droite en fonction de $r_1$ et $r_2$.
   (b) Soit $P$ un point entre $O_1$ et $O_2$. Donner les expressions de $r_1$ et $r_2$ en fonction de $x$ et en déduire le champ magnétique $\overrightarrow{B} = \overrightarrow{B}_1(P) + \overrightarrow{B}_2(P)$ en fonction de $x$.
   (c) Calculer le flux propre de $\overrightarrow{B}$ à travers le rectangle vide délimité par le circuit.
   (d) En déduire $L$ en fonction de $\mu_0$, $H$, $D$ et $a$, puis celle de $\Lambda$.
2. Le fil 1 au potentiel $V_1 = V(A_1) = -V$, porte la charge $-q$, le fil 2 au potentiel $V_2 = V(A_2) = V$ porte la charge $q$, la tension entre les deux fils est donc $U_{A_1A_2} = -2V$.
   (a) Soit $M$ un point de l'espace. Déterminer les normesădes champs $\overrightarrow{E}_1$ créé par le fil de gauche et $\overrightarrow{E}_2$ créé par le fil de droite en fonction de $r_1$ et $r_2$.
   (b) Soit $P$ un point entre $O_1$ et $O_2$. Donner les expressions de $r_1$ et $r_2$ en fonction de $x$ et en déduire le champ électrique $\overrightarrow{E} = \overrightarrow{E}_1(P) + \overrightarrow{E}_2(P)$ en fonction de $x$.
   (c) En intégrant entre $A_1$ et $A_2$ en déduire la relation entre $U$ et $q$.
   (d) En déduire $C$ en fonction de $\varepsilon_0$, $H$, $D$ et $a$, puis celle de $\Gamma$.
3. Calculer $\frac{1}{\sqrt{\Lambda\Gamma}}$