

TP MAPLE / physique numéro 2

PC, 7 janvier 2009

Transformation d'un signal périodique

Préliminaires mathématiques

- **Linéarité de la et superposition** : soit une équation différentielle linéaire homogène :

$$a_0(t)X + a_1(t)\dot{X} + a_2(t)\ddot{X} = 0$$

Si X_1 et X_2 sont solutions, alors la superposition $X_1 + X_2$ est solution.

- **Décomposition en série de Fourier d'une fonction périodique**. Soit f une fonction de t périodique de période T , de fréquence $f = \frac{1}{T}$ et de pulsation $\omega = 2\pi f$. Alors :

$$f(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [A_n \cos(n\omega t) + B_n \sin(n\omega t)] = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos(n\omega t + \varphi_n)$$

- En français, on peut dire que tout signal périodique de fréquence f est la somme d'une composante continue et de sinusoides de fréquences les multiples entiers de la fréquence fondamentale f .
- Le terme $\frac{A_0}{2}$ est la composante continue; elle est de fréquence nulle, et est donc filtrée par tout filtre coupe-bas (passe-bande ou passe-haut).
- Le terme $A_n \cos(n\omega t) + B_n \sin(n\omega t) = C_n \cos(n\omega t + \varphi_n)$ est la n -ième composante harmonique.
- Les coefficients de la série s'expriment ainsi :

$$A_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos(n\omega t) dt \quad \text{et} \quad B_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin(n\omega t) dt$$

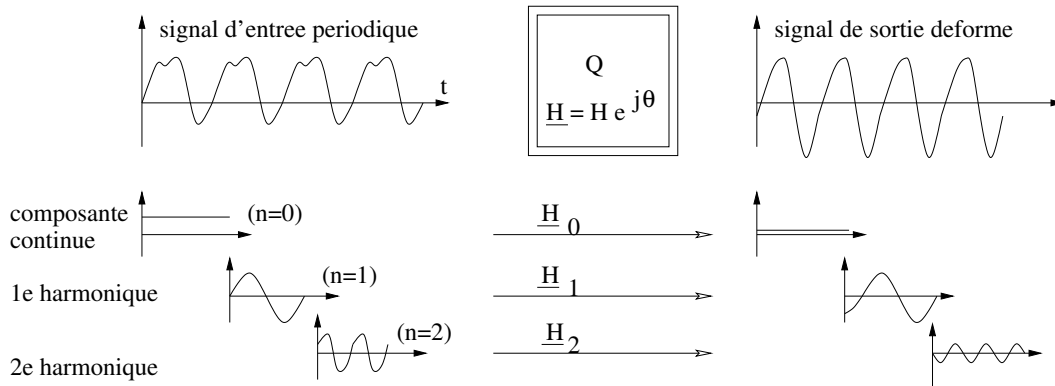
- On retrouve la définition de la valeur moyenne : $\frac{A_0}{2} = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt$.
- On a immédiatement

$$C_n = \sqrt{A_n^2 + B_n^2} \quad \text{et} \quad \tan \varphi_n = -\frac{B_n}{A_n}$$

- Le **spectre** du signal est la composition en amplitude (C_n) ou en phase (φ_n) du signal en fonction de la fréquence. Pour un signal périodique, le théorème de décomposition de Fourier prouve qu'on a un spectre en rateau, avec les pics régulièrement répartis aux fréquences 0 (composante continue), f , $2f$, \dots , nf , \dots .
- **Aspect électrique**. Lorsqu'on envoie un signal périodique électrique en entrée d'un quadripôle linéaire, par équivalence complexe temporelle, le signal de sortie vérifie une équation différentielle linéaire, on peut donc appliquer le principe de superposition et **le signal de sortie est la somme des transformées de chaque composante sinusoïdale harmonique du signal d'entrée**. Or, par définition de la fonction de transfert, $\underline{H}(n\omega) = \frac{\underline{u}_s}{\underline{u}_e}$, soit

$$H_n e^{j\theta_n} \frac{C'_n e^{jn\omega t} e^{j\varphi'_n}}{C_n e^{jn\omega t} e^{j\varphi_n}} \quad \text{donc} \quad \begin{cases} C'_n = H_n C_n \\ \varphi'_n = \varphi_n + \theta_n \end{cases}$$

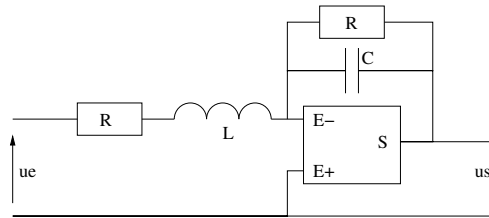
- **Aspect acoustique.** L'oreille humaine est très sensible au spectre d'un son périodique : c'est sans doute un héritage préhistorique, car c'est par la différence de spectre que nos ancêtres distinguaient les divers cris d'animaux, et qu'aujourd'hui, nous distinguons les voyelles. La déformation du son par le filtre de réception que constitue l'oreille avec son pavillon nous donne une image auditive du monde extérieur. On peut la changer en déformant simplement la forme du pavillon ou celle du conduit auditif. Notre propre voix nous parvient, en plus de la voie aérienne, par transmission osseuse, qui forme un filtre particulier : lorsque nous entendons notre propre voix par voie aérienne seulement, nous ne la reconnaissons pas. On peut aussi entendre la voix d'une autre personne en collant nos fronts, et on entend une voix nettement modifiée. Enfin, la voix entendue au téléphone est elle-aussi filtrée. Tout ceci illustre la transformation différente de chaque composante harmonique par un filtre et explique le changement de timbre.



Aspect musical. On trouve dans les huit premières harmoniques ($n=1$) la fondamentale (do 1 par exemple), ($n=2$) l'octave (do 2), ($n=3$) la quinte (sol 2), ($n=4$) l'octave (do 3), ($n=5$) la tierce (mi 3), ($n=6$) la quinte (sol 3), ($n=7$) la septième (si bémol) et ($n=8$) l'octave (do 4); ensuite viennent des notes moins justes (en fait les autres notes de la gamma).

Calculs informatiques

Maple est bien adapté au calcul systématique des coefficients de la série de Fourier, et des composantes harmoniques du signal de sortie. On va travailler sur un signal d'entrée rectangulaire, de rapport cyclique $\alpha = 1/2$: $u_e(t) = 10$ pour $t \in [0, \frac{1}{2}T]$ et $u_e(t) = 0$ pour $t \in [\frac{1}{2}T, T]$. On le fait passer dans le filtre ci-contre.



On pose $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$, $Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$ et $x = \frac{\omega}{\omega_0}$. On prendra numériquement $T = 1s$, donc $\omega = 2\pi \text{rads}^{-1}$. $\omega_0 = 1 \text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$ et $Q = 1$.

1. Justifier que $\underline{H} = \frac{1}{1 - \omega^2 + j(Q + \frac{1}{Q})\omega}$.
2. Calculer à la main $\frac{A_0}{2}$.
3. $u_e(t) - A_0/2$ est une fonction impaire, on en déduit que $A_n = 0$ pour $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $B_n = 0$ si $n = 2p$ et que $B_n = \frac{4}{n\pi}$.
4. On en déduit que $u_e(t) = 5 + \sum_{p=0}^{\infty} \frac{4}{(2p+1)\pi} \sin((2p+1)2\pi t)$. Tracer grâce à Maple les sommes partielles jusqu'à N et observer la reconstruction du créneau.
5. On choisit $n = 2p + 1$ avec $p \in \mathbb{N}$. Donner l'expression de \underline{H}_p en fonction de p . Demander à Maple le calcul de son module H_p et de son argument φ_p .
6. En déduire le tracé de la tension de sortie $u_s = 5 + \sum_{p=0}^{\infty} H_p \cdot \frac{4}{(2p+1)\pi} \sin((2p+1)2\pi t + \varphi_p)$. Observer la déformation du signal.