

Feuille d'exercices numéro 2

Mécanique du solide

PC, 10 septembre 2008

Pour tous les exercices, on rappelle les moments d'inertie suivants :

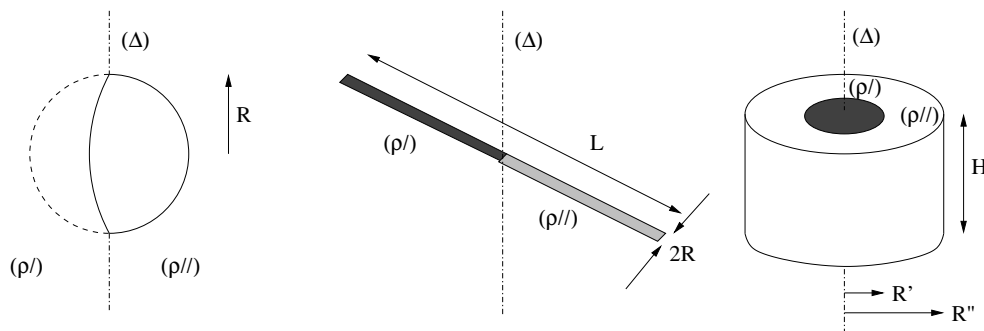
- tige de longueur L et de masse m autour d'un axe Δ médiateur : $J_{\Delta} = \frac{1}{12}mL^2$
- cylindre homogène de rayon R , de hauteur h , de masse m autour de son axe de révolution Δ : $J_{\Delta} = \frac{1}{2}mR^2$
- boule homogène de rayon R , de masse m autour d'un axe de révolution Δ : $J_{\Delta} = \frac{2}{5}mR^2$.

Cinématique du solide

Exercice 1 Cylindres. Soit un cylindre d'axe Oz de rayon R et de hauteur H . Déterminer sa masse dans les cas suivants : (1) masse volumique uniforme ρ_0 , (2) masse volumique $\rho(z) = \rho_0 \frac{z}{H}$, (3) masse volumique à symétrie radiale $\rho(r) = \rho_0 e^{-\frac{r}{R}}$. Déterminer la position du centre d'inertie des différents cylindres.

Exercice 2 Boule. Calculer la masse d'une boule de rayon R et de masse volumique à symétrie sphérique $\rho(r) = \rho_0 \frac{R}{r}$. Commenter le résultat obtenu.

Exercice 3 Solides composites. On utilise deux matériaux différents de masses volumiques ρ' et ρ'' pour fabriquer les solides composites suivants : (1) une boule formée de deux demi-boules ; (2) une tige constituée de deux demi-tiges ; (3) un cylindre formé d'une âme cylindrique sertie dans une bague :



Déterminer dans chaque cas le moment d'inertie par rapport à l'axe Δ .

Exercice 4 Chute d'une échelle. Une échelle de masse m et de longueur L glisse entre un mur (point de contact I) et le sol (point de contact J). On repère x l'abscisse de J , z l'abscisse de I et θ l'angle d'inclinaison de l'échelle par rapport à la verticale.

1. Déterminer les relations entre x , y et θ .
2. Quelle est la nature de la trajectoire de G ?
3. Déterminer les vitesses de glissement en I et en J .
4. Donner les expressions de \vec{L}_O et de Ec en fonction de θ , $\dot{\theta}$, m et L .

Roulement et glissement

Exercice 5 Éléments cinétiques d'un cylindre en roulement (I). Un cylindre de rayon r et de masse M roule sans glisser sur un plan horizontal, G se déplaçant à vitesse constante v par rapport au plan. Établir les relations entre les grandeurs cinématiques. Déterminer les expressions de la résultante cinétique, du moment cinétique en G dans le référentiel barycentrique, du moment cinétique au point de contact et de l'énergie cinétique de ce solide dans le référentiel lié au plan.

Exercice 6 Éléments cinétiques d'un cylindre en roulement (II). On reprend le même exercice dans le cas du roulement sans glissement de ce cylindre dans le fond d'une vallée en forme de demi-cercle de rayon R . On choisit comme variable cinématique l'angle θ de rotation du cylindre. Déterminer les expressions de la résultante cinétique, du moment cinétique en G dans le référentiel barycentrique, du moment cinétique au point de contact I et au centre du demi-cercle O et de l'énergie cinétique de ce solide dans le référentiel lié au plan.

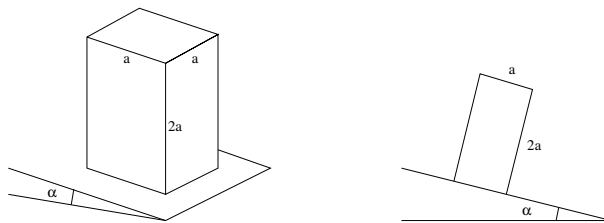
Exercice 7 Dérapage. Lors d'un dérapage, la roue de rayon R d'une voiture tourne à la vitesse angulaire ω tandis que la voiture se déplace à la vitesse v par rapport au sol verglassé. On suppose que le vecteur vitesse de glissement est égal à l'opposé du vecteur vitesse de la voiture se déplaçant sur le sol horizontal. Établir la relation liant v , R et ω . Quelle sera l'indication du compteur de vitesse (tachymètre) ?

Exercice 8 Mouvement hélicoïdal. On modélise une balle de fusil par un cylindre de masse M de rayon r surmonté d'une tête en forme de demi-boule de même rayon r et de même masse M . Pour stabiliser la balle, on lui imprime au moment de son éjection un mouvement de rotation grâce à des stries hélicoïdales : on définit le pas de vis par le paramètre p exprimé en mètre par tour : à chaque fois que la balle fait un tour, elle progresse de p mètres dans le canon. À la sortie du canon, la vitesse de G est $v\vec{u}_x$. Déterminer l'énergie cinétique totale de la balle dans le référentiel du canon.

Exercice 9 Roulement entre deux rails. Deux rails fins parallèles sont distants de $2d$. Une boule de rayon R roule sans glisser entre eux et se déplace ainsi à la vitesse v . Déterminer l'énergie cinétique de la boule.

Lois de Coulomb

Exercice 10 Équilibre d'un pavé sur un plan incliné. Un pavé parallélépipédique de masse m , de base carrée ($a \times a$) et de hauteur $2a$ est posé sur sa base sur un plan incliné d'un angle α par rapport à l'horizontale. Le coefficient de frottement statique est f , l'accélération de la pesanteur g .



1. Calculer l'angle limite α^* au dessus duquel le basculement du cube est inévitable.
2. Déterminer l'angle α pour laquelle le glissement est évité.
3. En déduire la valeur numérique minimale de f pour laquelle aucun glissement n'est possible.

Exercice 11 Boule sur plan incliné. Une boule de rayon R et de masse M roule sans glisser à la vitesse \vec{v} du haut vers le bas sur un plan incliné d'un angle α par rapport à l'horizontale. Déterminer l'énergie cinétique de la boule dans le référentiel galiléen du sol. On note $f = f_s = f_d$ le coefficient de frottement au point I de contact de la boule et du plan. Déterminer les caractéristiques des forces extérieures et de leurs moments en G et en I . Même question si la vitesse de glissement en I est $\vec{v}_g = -\vec{v}$.

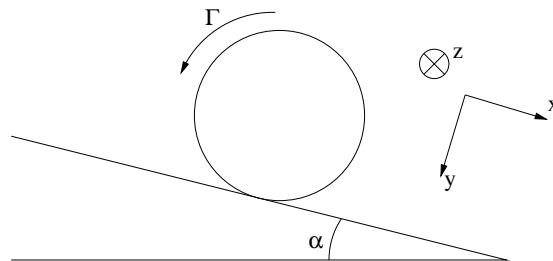
Exercice 12 «Rodéo». Un petit cube de masse m est posé sur le dessus d'un chariot parallélépipédique de masse M qui glisse sans frottement sur une table horizontale. Le chariot est relié à une paroi par un ressort de constante de raideur k et de masse négligeable, et il a un mouvement rectiligne. Déterminer l'amplitude maximale du mouvement en dessous de laquelle le cube ne glisse pas ; on notera f le coefficient de frottement entre le cube et le chariot.

Mécanique du solide

Exercice 13 Cylindre sur plan incliné. Un cylindre de masse M et de rayon R est posé sans vitesse initiale sur un plan incliné d'un angle α par rapport à l'horizontale. On note f le coefficient de frottement ; déterminer l'angle limite α_0 de α en dessous duquel il y a roulement sans glissement et au dessus duquel il y a glissement. Déterminer complètement dans les deux cas ($\alpha < \alpha_0$ et $\alpha > \alpha_0$) le mouvement du cylindre, les coordonnées des forces appliquées et vérifier à chaque fois la validité des trois classes de théorèmes (résultante cinétique, moment cinétique, énergétique).

Exercice 14 Bille dans un bol. Dans le fond d'un bol hémisphérique de centre O et de rayon R , on lance une bille de rayon r et de masse M avec une vitesse initiale \vec{v}_0 horizontale et suffisamment faible pour que la bille ne monte pas plus haut que O . Calculer l'angle maximal mesuré par rapport à la verticale jusqu'auquel le centre de la bille montera dans l'hypothèse d'un roulement sans glissement.

Exercice 15 Freinage et dérapage. Une roue de voiture est assimilée à un cylindre de masse M et de rayon R . Elle roule sans glisser sur un plan incliné d'un angle α par rapport à l'horizontale. La vitesse de son centre, à la date $t = 0$, est $\vec{v} = v_0 \vec{u}_x$. L'action du frein s'assimile à un couple de moment $\vec{\Gamma} = -\Gamma_r \vec{u}_z$.



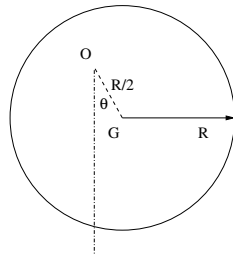
1. Déterminer la valeur minimale de Γ_r pour qu'il y ait freinage ; est-ce possible quel que soit α ?
2. Déterminer la valeur maximale de Γ_r pour qu'il n'y ait pas glissement.
3. Déterminer Γ_r pour que la distance d'arrêt soit minimale.

Exercice 16 Billard. Une bille de billard de masse M et de rayon R se déplace sur le tapis avec un coefficient de frottement f . L'axe x est l'axe de déplacement horizontal de la bille, l'axe z est vertical et l'axe y horizontal complète la base orthonormée directe.

1. On frappe la bille un peu en dessous du plan médian (effet rétro), ce qui donne simultanément à la bille une vitesse initiale $\vec{v}_G = v_0 \vec{u}_x$ et une vitesse de rotation initiale en un sens opposé au sens "naturel" $\vec{\omega} = -\omega_0 \vec{u}_y$. Établir les lois $x(t)$, $\omega(t)$ et $v_g(t)$ dans la première phase du mouvement (avec glissement) ; en déduire la date de fin de glissement et décrire le mouvement ultérieur. Montrer que la bille peut revenir en arrière si ω_0 est assez grand.
2. On frappe la bille un peu au dessus du plan médian (effet coulé), ce qui donne simultanément à la bille une vitesse initiale $\vec{v}_G = v_0 \vec{u}_x$ et une vitesse de rotation initiale dans le sens "naturel" $\vec{\omega} = \omega_0 \vec{u}_y$ supérieure à la vitesse correspondant au roulement sans glissement, donc telle que $\omega_0 > \frac{v_0}{R}$. Établir les lois $x(t)$, $\omega(t)$ et $v_g(t)$ dans la première phase du mouvement (avec glissement) ; en déduire la date de fin de glissement et décrire le mouvement ultérieur. Conclure sur l'utilité de cet effet.

Exercice 17 Oscillations de torsion. L'oscillateur élastique (masse m en mouvement rectiligne horizontal sans frottement au bout d'un ressort de constante de raideur k) possède pour équivalent en rotation le système {solide en rotation autour d'un axe vertical passant par G , de moment d'inertie J , fixé au plafond par un fil de torsion colinéaire à l'axe de constante de raideur C }. Établir l'équation différentielle vérifiée par θ en utilisant le théorème du moment cinétique. En déduire l'expression énergétique de la loi et valider l'expression de l'énergie potentielle donnée dans le cours.

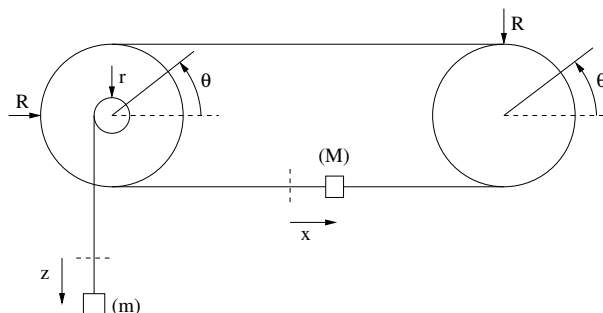
Exercice 18 Pendule pesant. Un cylindre de rayon $R = 30\text{cm}$, de masse m , de centre d'inertie G , de moment d'inertie autour de son axe de révolution Δ_G $J = \frac{1}{2}mR^2$ est en rotation sans frottement autour d'un axe Δ_O , passant par O et parallèle à Δ_G et distant de $\frac{R}{2}$. On note θ l'angle d'inclinaison de (OG) par rapport à la verticale et $g = 9,81\text{m} \cdot \text{s}^{-2}$ l'accélération de la pesanteur.



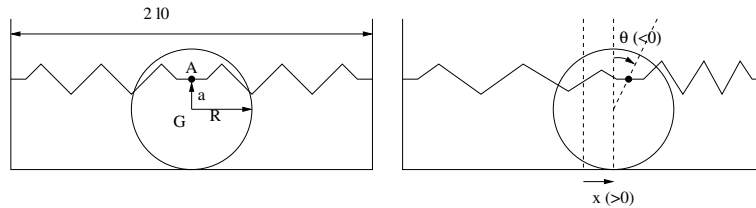
1. Déterminer l'énergie cinétique du cylindre dans le référentiel galiléen du laboratoire en fonction de $\dot{\theta}$.
2. Déterminer l'énergie mécanique du cylindre ne fonction de θ et de $\dot{\theta}$.
3. En déduire la valeur numérique de la période des petites oscillations du cylindre en rotation autour de Δ_O .

Exercice 19 Rotor équilibré. Une boule de rayon $R = 1\text{m}$ est faite d'un métal de masse volumique $\mu = 12\,000\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$ et de chaleur massique $c = 1\,300\text{J} \cdot \text{kg}^{-1}\text{K}^{-1}$. Elle est mobile en rotation autour d'un de ses diamètres. Elle est mise en rotation grâce à l'action d'un moteur qui développe un couple de $\Gamma_0 = 100\text{N} \cdot \text{m}$ et subit un couple de frottement fluide $-\alpha\omega$ avec $\alpha = 10\text{N} \cdot \text{m} \cdot \text{s}$. Déterminer la loi horaire de la vitesse de rotation $\omega(t)$ à partir de l'arrêt. Calculer la vitesse limite de rotation en $\text{tr} \cdot \text{min}^{-1}$, l'énergie cinétique de la boule une fois lancée et l'échauffement que subira le métal lorsque, à l'extinction du moteur, on la laisse tourner jusqu'à l'arrêt.

Exercice 20 Système complet. On considère deux poulies identiques (rayon R , moment d'inertie J par rapport à l'axe de rotation horizontal autour duquel il y a rotation sans frottement) reliées par un fil inextensible de masse négligeable et ne glissant pas dans sa gorge. Une masse M est liée au fil reliant les deux poulies. L'une des deux poulies est solidaire d'un tambour de moment d'inertie négligeable et de rayon r auquel est liée une masselotte m suspendue par un fil. La masse m est abandonnée sans vitesse initiale. Déterminer le mouvement de la masselotte (on arrête l'étude lorsque M touche la poulie de droite).



Exercice 21 Solide et ressorts. Un cylindre de rayon R et de masse M roule sans glisser sur un support horizontal. Il est relié aux deux parois verticales par deux ressorts identiques (k, ℓ_0) dans une cavité de largeur $2\ell_0$ selon le schéma suivant :



Les variables qui décrivent le mouvement sont x et θ . Déterminer les équations horaires dans l'hypothèse des petites oscillations.

Exercice 22 Un défi impossible. On se place de profil contre un mur, le bord du pied droit touchant le mur. Pourquoi est-il impossible de lever le pied gauche? On se place dos au mur, les talons contre le mur. Pourquoi est-il impossible de “saluer”?

Exercice 23 Tabouret à vis. Le siège d'un tabouret de piano est constitué d'un plateau cylindrique de masse M et de rayon R et d'un axe vertical fileté de masse négligeable vissé dans un socle immobile. On note p le pas de vis exprimé en mètre par tour. Le mouvement est repéré par l'angle de rotation du plateau θ et par l'altitude du plateau z . Lorsque le plateau tourne dans le sens trigonométrique vu du dessus, l'axe se dévisse et le plateau monte. Un frottement linéaire s'exerce au niveau du pas de vis et son action se ramène à un couple de frottement $\vec{\Gamma} = -\lambda\dot{\theta}\vec{u}_z$. On donne une impulsion initiale au plateau quand il est en bas : $\theta_0 = 0, z_0 = 0$ et $\dot{\theta}_0 = \omega_0$. Établir les équations horaires $\theta(t)$ et $z(t)$. Faire un graphe d'évolution temporelle de z .

Exercice 24 Sphère lestée. Sur la surface d'une sphère de rayon R et de masse M , on place en A un lest ponctuel de masse m . On note C le centre de la sphère. On place la sphère sur un support horizontal et on suppose que le plan passant par C, A et I le point de contact est vertical. Déterminer la période des petites oscillations.

Exercice 25 Tartine beurrée. Un tartine beurrée de centre d'inertie G , de masse m , d'épaisseur $2e$ et de moment d'inertie J par rapport à l'axe (G, y) est posée sur le bord (I, y) d'une table. On note a le “porte-à-faux”, c'est-à-dire la distance entre I et le projeté orthogonal de G sur la base de la tartine. On note θ l'angle dont tourne la tartine par rapport à sa position initiale horizontale sans vitesse initiale. On note f le coefficient de frottement entre le bord de la table et la tartine.

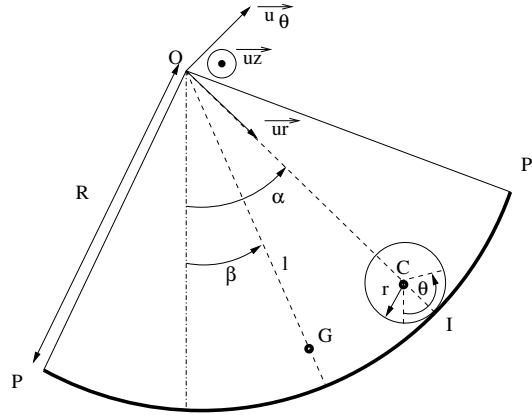
1. Déterminer $\dot{\theta}$ et $\ddot{\theta}$ en fonction de θ et des constantes du problème.
2. Dresser les graphes donnant N et T en fonction de θ .
3. La tartine décolle-t-elle avant de glisser ou est-ce l'inverse?

Exercice 26 Modèle d'une automobile. On modélise une automobile par deux cylindres de même masse m , et de même rayon R , de centres C_1 (roue avant) et C_2 (roue arrière), solidaires grâce à des liaisons pivot parfaites à une tige C_2C_1 de centre G , de masse M et de longueur L . L'axe x est l'axe horizontal de la route dans le sens $\vec{C}_2\vec{C}_1$, l'axe z est vertical et l'axe y horizontal complète la base orthonormée directe. L'action du moteur se ramène à un couple $\vec{\Gamma} = \Gamma\vec{u}_y$. On suppose que les roues roulent sans glisser et on note f le coefficient de frottement. La voiture est une “traction avant”, c'est-à-dire que $\vec{\Gamma}$ s'exerce sur la roue avant.

1. Établir la relation entre les vitesses de rotation des disques et la vitesse de déplacement de la voiture.
2. Par application du TPC, déterminer l'accélération de la voiture.
3. Appliquer le TRC à l'ensemble de la voiture.
4. Appliquer le TRC à l'ensemble de la voiture.

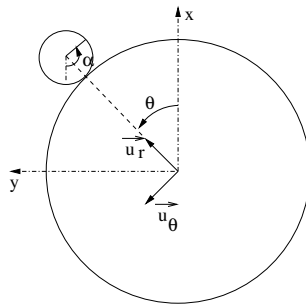
5. Appliquer le TMC en G dans \mathcal{R}_b à l'ensemble du véhicule.
6. Appliquer le TMC à chaque partie du véhicule.
7. On suppose pour simplifier que $m \ll M$ et on pose $\frac{r}{R} = F$. En déduire des expressions approchées des composantes des actions de contact au niveau des roues. La roue avant peut-elle décoller? La roue arrière peut-elle décoller? La roue avant peut-elle glisser? La roue arrière peut-elle glisser?

Exercice 27 Bille roulant dans un rail circulaire mobile. Les points P et P' sont attachés en O par des fils inextensibles de masse négligeable, ce qui permet au rail quart-circulaire d'osciller autour de l'axe horizontal passant par O . On pose $OA = \ell$, M la masse du rail, $J' = MR^2$ le moment d'inertie du rail par rapport à son axe de rotation, \vec{N} et \vec{T} les forces de réaction du rail sur la sphère en I , m la masse de la bille et $J = \frac{2}{5}mr^2$ le moment d'inertie de la sphère autour de son axe passant par son centre C . Les inconnues angulaires sont α l'angle dont a tourné C par rapport à la position de repos de la sphère, θ l'angle dont la sphère a tourné autour de son axe propre, et β l'angle entre la verticale et OG .



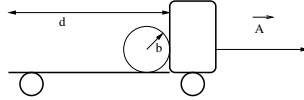
On suppose que la bille roule sans glisser dans le rail. Établir les trois équations différentielles liant les trois variables angulaires α , β et θ .

Exercice 28 Bille roulant sur une sphère. Une bille de masse m , de rayon r , de moment d'inertie par rapport à un axe passant par son centre G $J = \frac{2}{5}mr^2$ roule sans glisser sur une sphère fixe de centre O et de rayon R . À la date $t = 0$, la bille est posée sans vitesse initiale sur le sommet de la sphère. L'angle de rotation de la bille autour de son axe est α , l'angle entre la verticale (O, x) et $\vec{OG} = (R + r)\vec{u}_r$ est noté θ .



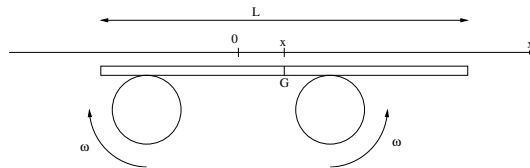
1. Donner la relation entre α et θ découlant de la condition de roulement sans glissement.
2. Écrire le théorème de la résultante cinétique sur la bille.
3. Écrire la conservation de l'énergie mécanique de la bille entre $\theta = 0$ et θ quelconque.
4. En combinant les trois équations scalaires, montrer que le décollage de la bille a lieu lorsque θ atteint une valeur θ^* qu'on calculera.

Exercice 29 Mouvement d'un tonneau sur la plate-forme d'un camion. Un tonneau cylindrique, de masse m , de rayon b , de moment d'inertie autour de son axe de révolution $\frac{1}{2}mb^2$ est posé sur le plateau horizontal d'un camion qui accélère avec une accélération $\vec{a} = A\vec{u}_x$. Le coefficient de frottement statique est pris égal au coefficient de frottement dynamique, soit f . Le plateau a une longueur d .



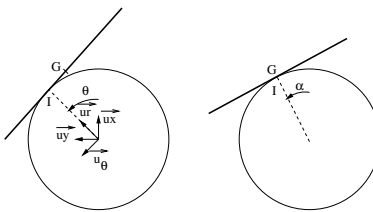
Déterminer les valeurs d'accélération du camion pour lesquelles il y a roulement sans glissement, celles pour lesquelles il y a glissement, établir dans les deux cas l'équation horaire du mouvement du tonneau sur le plateau, et la distance L parcourue par le camion lorsque le tonneau va en tomber.

Exercice 30 Machine de Timochenko. Dans le dispositif suivant, les deux cylindres tournent dans deux sens opposés, à la même vitesse angulaire ω . La plaque posée dessus a une masse m et une longueur L . Elle reste horizontale et on repère sa position par l'abscisse x de son centre d'inertie G ($x = 0$ correspond au point milieu).



On note f le coefficient de frottement statique ou dynamique entre la plaque et les cylindres. Montrer que la plaque oscille horizontalement. En est-il de même si on inverse le sens de rotation des cylindres ?

Exercice 31 Glissement d'une barre sur un cylindre. La barre S de longueur 2ℓ et de masse m roule sans glisser sur le cylindre C de centre O et de rayon r . On note I le point de contact entre la barre et le cylindre, f le coefficient de frottement, g l'accélération de la pesanteur et θ l'angle entre la verticale et le rayon $[O, I]$.



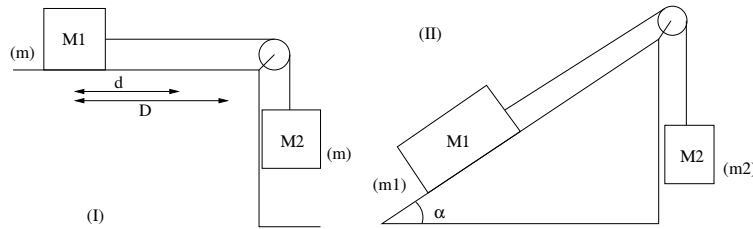
1. On suppose la barre en équilibre.
 - (a) Déterminer les composantes de la réaction du cylindre sur la barre.
 - (b) En déduire la relation entre θ et f .
2. On étudie maintenant les mouvements de la barre. On note α la valeur de θ quand $G = I$.
 - (a) Exprimer \vec{IG} en fonction de r , α et θ .
 - (b) En déduire les coordonnées x_G et y_G de G dans la base cartésienne et celles \dot{x}_G et \dot{y}_G de son vecteur vitesse \vec{v}_G .
 - (c) Donner l'expression de l'énergie potentielle de pesanteur de la barre en prenant $E_p = 0$ pour $\theta = 0$.
 - (d) Donner l'expression de l'énergie cinétique de la barre.
 - (e) Justifier et exprimer la conservation de l'énergie mécanique.
 - (f) Montrer l'existence et l'unicité d'une position d'équilibre stable et déterminer la période des petites oscillations autour de celle-ci.

Exercice 32 Cabrage d'une moto. On modélise une moto par trois solides distincts :

1. la roue arrière de rayon R , de masse m et de moment d'inertie autour de son axe $J_1 = \frac{1}{2}mR^2$ est en rotation autour de O_1 et soumise de la part du moteur à un couple de moment résultant $\vec{\Gamma}$;
2. la roue avant de rayon R , de masse m et de moment d'inertie autour de son axe $J_2 = \frac{1}{2}mR^2$ est en rotation autour de O_2 ;
3. le cadre est un segment O_1O_2 de longueur L , de masse M et de centre G , englobant le moteur.

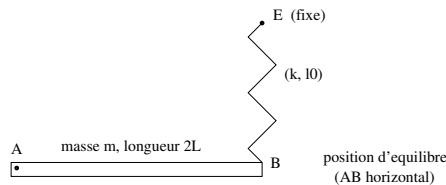
Le coefficient de frottement entre chacune des deux roues et le sol est noté f . On note θ_1 et θ_2 les angles de rotation des roues de la moto et x l'abscisse de la moto sur un sol horizontal. Étudier le mouvement de la moto, étudier les conditions de roulement sans glissement au niveau des deux roues et étudier la condition de cabrage, c'est-à-dire de soulèvement de la roue avant.

Exercice 33 Machine d'Atwood. Dans les deux dispositifs suivants, la poulie est parfaite, c'est-à-dire que la norme de la tension du fil de part et d'autre est identique. On distingue les poulies de masse nulle, où la rotation de la poulie lorsque le fil se déplace ne s'accompagne d'aucune énergie cinétique, et les poulies de masse non nulle, où la rotation de la poulie se fait sans glissement du fil dans la gorge, et où il faut tenir compte de l'énergie cinétique de rotation de la poulie assimilée à un cylindre.



1. Dans la situation (I), la poulie est sans masse. Le système est initialement immobile. On note f le coefficient de frottement dynamique entre M_1 et le support horizontal. On note d la distance parcourue par M_1 jusqu'au contact de M_2 avec le sol et D la distance totale jusqu'à l'arrêt. Donner une expression de f .
2. Dans la situation (II), étudier le mouvement quand la poulie, de rayon R , est sans masse puis quand elle est de masse m .

Exercice 34 Plongeur. Un plongeur est modélisé par une planche de longueur $2L$, tournant sans frottement autour d'un axe horizontal passant par A . Elle est retenue en son autre extrémité B par un ressort de constante de raideur k et de longueur à vide ℓ_0 , tel que à l'équilibre la planche est horizontale.



Déterminer la période des petites oscillations de la planche.