Fiche numéro 2

Méthodologie : les forces centrales

PC, 4 septembre 2008

1 Forces centrales non newtoniennes

- Elles sont rares aux concours !
- On demande dans ce cas de refaire les démonstrations de cours sur l'invariance de $\overrightarrow{L}_O$ (ou $\overrightarrow{C}$), ses conséquences, et l'invariance de Em dans le cas d'une force conservative.
- Dans des cas extrêmement rares (ressort par exemple), on peut intégrer la ou les équations différentielles du mouvement.
- Dans les autres cas, on ne peut pas envisager mieux que les études suivantes.
  1. On fait une analyse d'un résultat d'expérience, éventuellement un portrait de phase (PC).
  2. On cherche des solutions particulières en faisant une hypothèse supplémentaire relative à r (par exemple, on cherche si un mouvement circulaire est possible en prenant $\dot{r} = 0$) ou à θ (par exemple, on cherche si un mouvement à vitesse angulaire constante est possible en prenant $\dot{\theta} = \omega = \text{cste}$).
  3. On procède à la détermination théorique des variations possibles de r, de ses bornes, de l'état lié ou libre du système grâce à Ep_{eff} (difficile, mais très payant pour un candidat qui maîtrise cet outil pointu) dans le cas d'une force conservative.

2 Forces centrales newtoniennes

- Rappelons d'abord un résultat mathématique : le mouvement du satellite en orbite elliptique est régi par une équation différentielle du second ordre. Il suffit donc de la connaissance de deux grandeurs pour déterminer complètement le mouvement.
- Dans les divers exercices sur ce sujet, on trouve des **couples privilégiés** de grandeurs. Dans la grande majorité des cas, l'énoncé donne un de ces couples et demande de déterminer les valeurs d'un autre couple.
- Comment ces couples sont-ils formés ? Il faut pour cela considérer les exigences expérimentales, techniques et théoriques des astrophysiciens :
  - Les astronomes mesurent les caractéristiques des orbites : période T, vitesses en divers points, en particulier v_P et v_A, grand axe a et petit axe b, rayon au périastre r_P et à l'apastre r_A.
  - Les astrophysiciens s'intéressent aux caractéristiques des corps célestes : masses des astres m_S et des satellites m, vitesse aréolaire $\mathcal{V}_a$ et constante de la loi des aires C, distance minimale d'approche d'un astéroïde r_P, énergie mécanique Em (pour estimer les impacts), paramètre p et excentricité e.
  - Les physiciens des techniques spatiales cherchent à déterminer les caractéristiques de leurs satellites et capsules spatiales d'observation ou d'exploration : vitesse et énergie cinétique Ec de lancement (pour le dimensionnement des lanceurs), durées de voyage et positionnements.
- Les très nombreuses relations entre ces différentes grandeurs sont difficiles à mémoriser. Le programme officiel est clair à ce sujet : «Les relations faisant intervenir p, a, b et e **ne sont pas exigibles.**» Elles doivent donc être données, le cas échéant, par l'énoncé. Nous encourageons cependant le lecteur à faire un effort de mémoire pour savoir au minimum les grandeurs qu'elles relient.

- De la lecture de nombreux sujets de concours, il ressort que les grandeurs caractéristiques de l'orbite elliptique peuvent être classées par **couples privilégiés** : • vitesse et position $(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{OM})$ qu'on veut atteindre ou qu'on observe comme conditions initiales • période et périgée (T, r_P) pour une comète • période et demi-grand axe (T, a) pour une planète • paramètre et excentricité (p, e) pour les caractéristiques de conicité • périgée et apogée (r_P, r_A) pour un satellite lancé • énergie mécanique et moment cinétique $(Em, \overrightarrow{L}_O)$ ou énergie mécanique et constante de la loi des aires (Em, C) pour les grandeurs constantes du mouvement.
- La démarche de réflexion est alors la suivante : si on a bien présent à l'esprit le catalogue des relations, on cherche **mentalement** un chemin utilisant tour à tour les relations clés qui permettront, étape par étape, de calculer succesivement diverses grandeurs jusqu'à celle qui est demandée par l'énoncé. Ensuite, seulement, on effectue les calculs. Cette manière de faire évite de se perdre dans les lois, et de tourner en rond, au risque de se retrouver après un long calcul à une simplification finale débouchant sur $\ldots 0 = 0$!
- **Par exemple**, si on connaît les masses de l'astre et du satellite et qu'on cherche à calculer la vitesse v_A à l'apastre connaissant les valeurs de (T, r_P), un chemin possible est :
  - La troisième loi de Kepler $\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{\mathcal{G}m_S}$ permet de calculer a à partir de T.
  - L'expression $Em = -\frac{\mathcal{G}m_S m}{2a}$ permet le calcul de Em.
  - $2a = r_P + r_A$ donc on peut calculer r_A.
  - On en déduit l'énergie potentielle en A : $Ep_A = -\frac{\mathcal{G}m_S m}{a}$.
  - $Em = Ec_A + Ep_A$ permet de calculer Ec_A.
  - Enfin, $Ec_A = \frac{1}{2}mv_A^2$ permet de calculer v_A.

3 Système à deux corps isolés avec force d'interaction newtonienne

- Ce cas est l'un des aboutissements de la mécanique du point avec l'étude du système de deux astres en interaction gravitationnelle et celle du système de deux particules chargées hors considérations quantiques ou relativistes.
- On procède à la réduction du problème

$$\{(M_1, m_1)\ ;\ (M_2, m_2)\} \rightarrow \left\{(G, m_1 + m_2)\ ;\ \left(M^*, m^* = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}\right)\right\}$$

- Dans le référentiel barycentrique, G est fixe et M^* est soumis à une force centrale newtonienne.
- On procède à l'étude des caractéristiques du mouvement de M^*
- On revient aux mouvements de M_1 et M_2 autour de G grâce aux lois d'homothétie.
- On retrouve enfin les mouvements des deux corpsădans le référentiel galiléen de travail par la loi de composition des vitesses $\overrightarrow{v}_i = \overrightarrow{v}_G + \overrightarrow{v}_i^*$.