

Feuille d'exercices numéro 7

Ondes

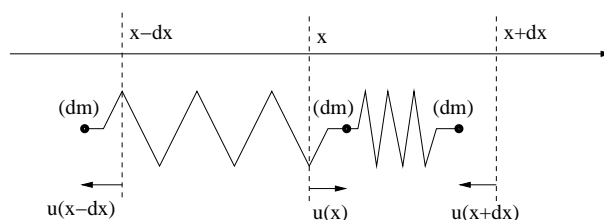
PC, 13 décembre 2008

Équations de d'Alembert diverses

Exercice 1 Ondes de compression et de torsion. Une éprouvette cylindrique est de longueur L et de section $S = \pi a^2$, faite d'un matériau élastique de module d'Young E (homogène à une pression). On étudie deux types d'onde par une méthode analogue : on découpe l'éprouvette en tronçons de longueur élémentaire reliés deux à deux (A) par un ressort de constante de raideur k inversement proportionnelle à la longueur (B) par un fil de torsion de raideur c inversement proportionnelle à la longueur.

A. Propagation d'une onde longitudinale de compression.

1. Préliminaire : la masse de l'éprouvette est m et quand on la soumet à une force F , sa longueur passe de L à $L + \Delta L$. Déterminer sa masse linéique μ et sa constante de raideur k . Le module d'Young E est défini ainsi : une éprouvette de section s et de longueur ℓ a pour constante de raideur $k = E \cdot \frac{S}{\ell}$. Donner l'expression de E en fonction de F , L , S et ΔL . Dans la suite de cette partie, on pose $\chi = E \cdot S$.
2. On note $u(x)$ le déplacement longitudinal de la masselotte M de masse dm d'abscisse au repos x . On procède à la discrétisation du problème selon le schéma suivant.

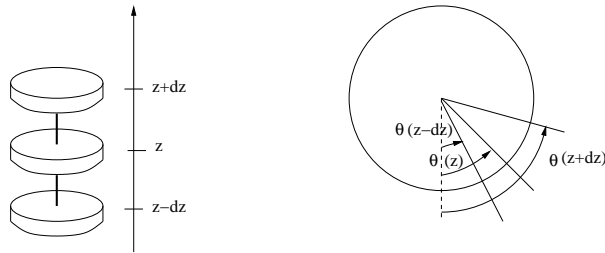


Donner les expressions de dm , k et ℓ_0 (caractéristiques de chaque petit ressort) en fonction de μ , χ et dx .

3. Donner les expressions des longueurs des ressorts entourant la masselotte centrale et en déduire l'équation de d'Alembert vérifiée par u . Donner l'expression de la célérité c_C des ondes de compression.

B. Propagation d'une onde de torsion.

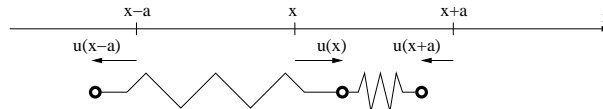
1. Préliminaire : la masse de l'éprouvette est m et quand on la soumet à un couple de torsion Γ , elle se tord d'un angle Θ . Déterminer sa masse linéique μ et sa constante de rappel \mathcal{C} . Le module d'élasticité de torsion G est défini ainsi : une éprouvette de section s et de longueur ℓ a pour constante de rappel $\mathcal{C} = G \cdot \frac{S}{\ell}$. Donner l'expression de G en fonction de γ , L , S et Θ . Dans la suite de cette partie, on pose $\sigma = G \cdot S$.
2. On note $\theta(z)$ l'angle de rotation de la masselotte cylindrique de masse dm , de section $S = \pi a^2$ et de cote z . On procède à la discrétisation du problème selon le schéma suivant.



Donner les expressions du moment d'inertie dJ de la masselotte et de la constante de rappel c de chaque petit fil de torsion en fonction de μ , a , σ et dz .

- Donner les expressions des angles de torsion des fils entourant la masselotte centrale et en déduire l'équation de d'Alembert vérifiée par θ . Donner l'expression de la célérité c_T des ondes de torsion.

Exercice 2 Limites de l'approximation des états continus. Un élastique est réellement formé d'une chaîne de ressorts de constante de raideur κ (lire kappa), de longueur au repos a reliant des masselottes élémentaires m . Les masselottes couissent sans frottement sur l'axe horizontal et on néglige le poids devant les autres forces.

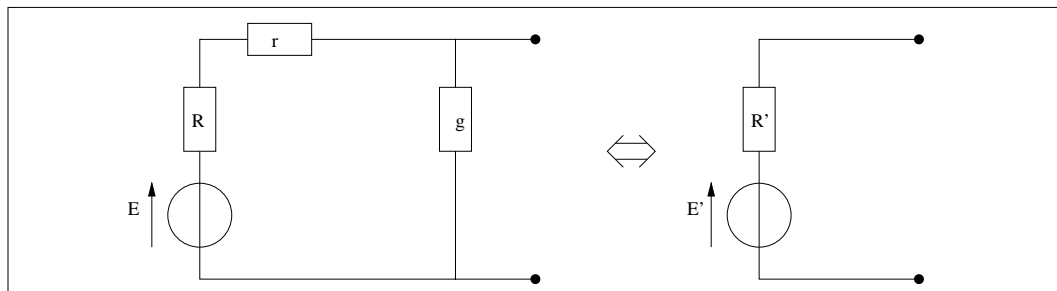


- En écrivant la deuxième loi de Newton pour la masse centrale, établir la relation vérifiée par les élongations longitudinales $u(x)$, $u(x-a)$ et $u(x+a)$.
- On cherche une solution sous la forme $u(x) = U_0 \cos(\omega t - kx)$ à laquelle on associe une solution complexe $\underline{u} = U e^{j\omega t} e^{-jkx}$. Établir la relation, dite *relation de dispersion*, entre ω et k (attention à ne pas confondre k et κ).
- Tracer l'allure de la courbe donnant ω en fonction de k .
- La **vitesse de phase** v_ϕ est la vitesse d'un point dont la phase $\phi = \omega t - kx$ est constante, soit $v_\phi = \frac{k}{\omega}$. On fait tendre a vers 0 (approximation continue). Montrer que v_ϕ tend vers une célérité c indépendante de ω .
- Si $a \neq 0$, le milieu est dit dispersif, c'est-à-dire que la vitesse de phase dépend de la pulsation. Qu'en déduit-on pour la propagation d'un signal ?

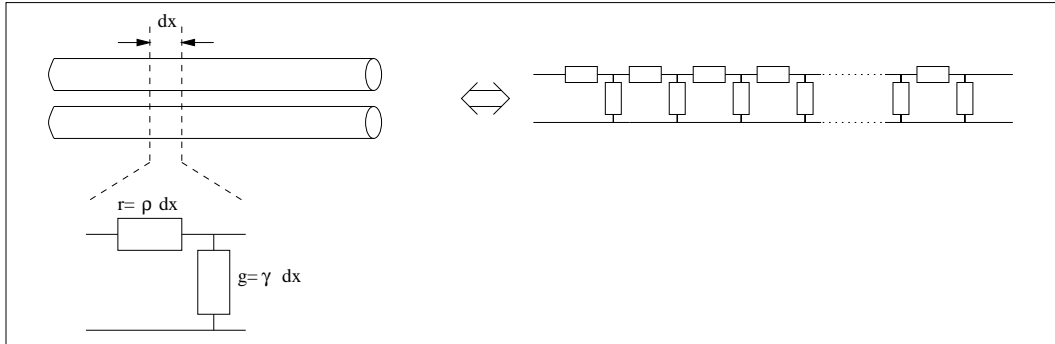
Exercice 3 Introduction aux ondes électromagnétiques. Établir l'équation de d'Alembert vérifiée par les champs électromagnétiques \vec{E} et \vec{B} dans le vide en supposant (hypothèse de l'onde plane) que $\vec{E} = \vec{E}(x, t)$ et que $\vec{B} = \vec{B}(x, t)$.

Exercice 4 Thévenin - Norton et onde électrique.

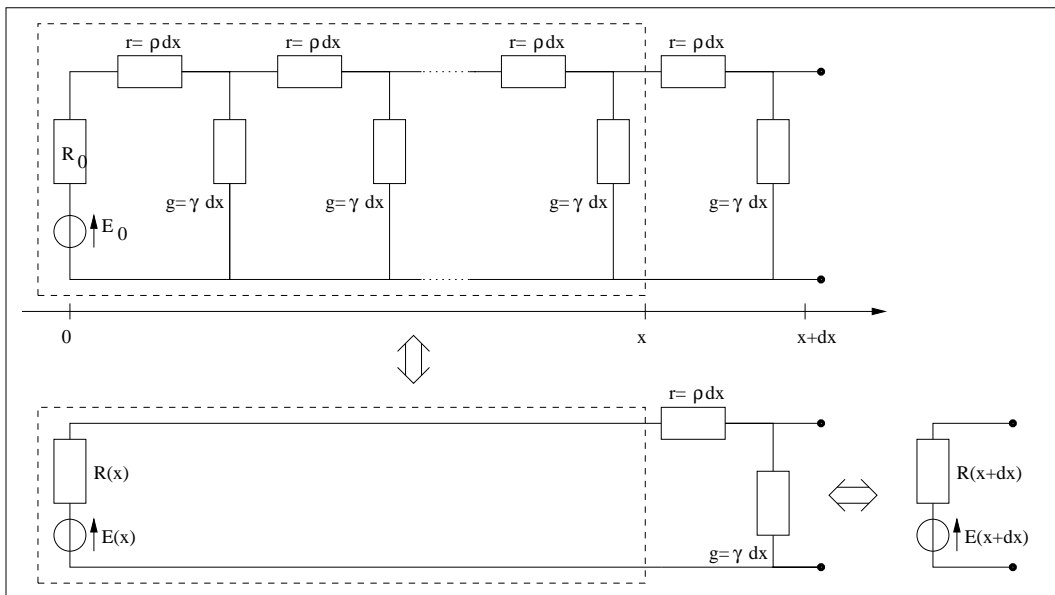
- Préliminaire.** Un réseau source est constitué d'un générateur idéal de tension de force électro-motrice E et de trois résistors, les deux premiers de résistances R et r , le troisième de conductance g (donc de résistance $\frac{1}{g}$). Montrer que ce réseau est équivalent à un générateur de Thévenin de force électromotrice $E' = \frac{E}{1+gR+gr}$ et de résistance interne $R' = \frac{R+r}{1+gR+gr}$.



2. Une ligne bifilaire est constituée de deux fils de cuivre parallèles, séparés par un isolant. Son comportement électrique est modélisé par une chaîne de résistors. Plus précisément, un tronçon de longueur infinitésimale dx de cette ligne est modélisé par deux résistors, le premier de résistance $r = \rho dx$ et le second de conductance $g = \gamma dx$:



- (a) Quelles sont les unités et les noms qu'on peut donner aux grandeurs ρ et γ ?
 (b) Proposer une justification physique à cette modélisation.
3. On branche, à l'extrémité gauche de la ligne bifilaire, un générateur de Thévenin de force électromotrice E_0 et de résistance interne R_0 . On note $E(x)$ et $R(x)$ les caractéristiques du générateur de Thévenin équivalent à la portion comprise entre les abscisses 0 et x . On a en particulier $E(0) = E_0$ et $R(0) = R_0$. On cherche à établir les équations différentielles vérifiées par les fonctions $E(x)$ et $R(x)$. Pour cela, on cherche les relations entre $E(x)$, $R(x)$ et $E(x + dx)$, $R(x + dx)$.



- (a) En utilisant le préliminaire, établir les expressions de $E(x + dx)$ et de $R(x + dx)$ en fonction de $E(x)$, $R(x)$, ρ , γ et dx .
 (b) On néglige les termes de second ordre, c'est-à-dire qu'on fait disparaître les termes en dx^2 , et on utilise les approximations $\frac{1}{1+\alpha dx} \simeq 1 - \alpha dx$ et $\frac{1}{1-\alpha dx} \simeq 1 + \alpha dx$ (α étant un coefficient quelconque). On rappelle que $\frac{dA}{dx} = \frac{A(x+dx) - A(x)}{dx}$. Établir les équations différentielles

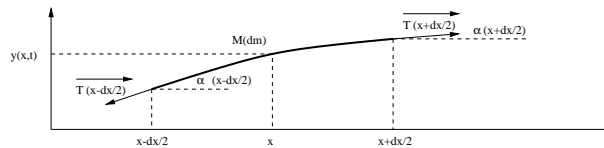
$$\begin{cases} \text{(I)} : \frac{dR}{dx} = \rho - \gamma R^2(x) \\ \text{(II)} : \frac{dE}{dx} = -\gamma R(x)E(x) \end{cases}$$

On pourra admettre la validité de ces équations pour la fin du problème.

- (c) Montrer que la solution constante $R = R_0 = \sqrt{\frac{L}{\gamma}}$ vérifie bien l'équation (I).
- (d) En déduire dans ce cas l'expression de $E(x)$ en résolvant l'équation (II).
- (e) On prend $\rho = 0,1$ (avec l'unité trouvée à la question 2.b)), $\gamma = 0,1$ (avec l'unité trouvée à la question 2.b)) et $E_0 = 100V$. On ferme la ligne de longueur $L = 2,50m$ sur un résistor de résistance $R_1 = 50,0\Omega$. Calculer R_0 , $E(L)$, $R(L)$ et en déduire l'intensité i circulant dans R_1 .
4. On suppose maintenant que le tronçon de longueur dx est assimilable à une inductance en série $L = \Lambda dx$ (qui remplace ρdx) et une capacité en parallèle $C = \Gamma dx$ (qui remplace γdx). Établir les équations aux dérivées partielles reliant $u(x, t)$ et $i(x, t)$. En déduire l'équation de d'Alembert vérifiée par ces deux fonctions et préciser la célérité de l'onde. Définir l'impédance de ligne \underline{Z}_ℓ .

Éléments de résolution

Exercice 5 Vibrations transversales entre deux extrémités fixes. On considère une corde horizontale de masse linéique μ , de longueur L , tendue entre ses deux extrémités fixes S et E . On note T_E la tension supposée constante aux extrémités de la corde. Dans l'hypothèse des petites vibrations transversales, la perturbation vibratoire est définie par l'altitude $y(x, t)$ du point M d'abscisse x à la date t , repérée par rapport à l'axe horizontal de la corde au repos. On étudie un élément de corde de longueur infinitésimale dx centré autour de l'abscisse x , de masse $dm = \mu dx$. On note α l'angle d'inclinaison entre la tangente à la corde et l'horizontale et on fait l'hypothèse des petits angles. $T(x, t)$ est la norme de la tension de la corde au point d'abscisse x à la date t . On néglige le poids devant les autres forces.



- Établir l'équation de d'Alembert vérifiée par y .
- Vérifier qu'une fonction du type $y(x, t) = Y \cos(\omega t \pm kx - \varphi)$ convient. En déduire la célérité de l'onde mécanique progressive.
- Vérifier qu'une fonction du type $y(x, t) = Y \cos(kx - \theta) \cos(\omega t - \psi)$ convient. Montrer qu'il est possible d'imposer les conditions aux limites $y(0, t) = y(L, t) = 0$ pour cette onde stationnaire.

Exercice 6 Timbre d'un élastique pincé. On tend une corde de longueur L , de masse linéique μ avec la tension T_E . Cette corde est fixée entre ses deux extrémités O et A . On néglige les effets de la pesanteur. On la "pince" en un point P d'abscisse $x_P = OP = \ell$, c'est-à-dire qu'on écarte P de l'axe horizontal jusqu'à l'ordonnée $y_{P0} = h$, les deux brins de corde PO et PA formant deux segments droits, et on lâche à $t = 0$.

- Traduire l'équation de d'Alembert par le théorème de la puissance cinétique, en déduire l'énergie potentielle linéique de déformation de la corde.
- Chercher une solution sous la forme d'une superposition d'ondes stationnaires du type $y_n(x, t) \sin(kx) \cos(\omega t)$.
- Pourquoi le timbre de la guitare change-t-il selon la position de l'ongle ou du médiateur ?

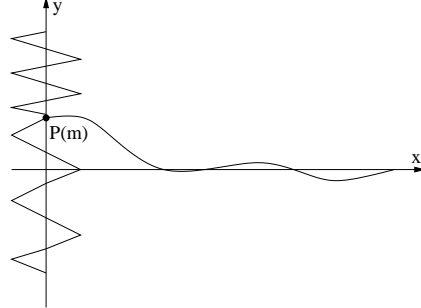
Exercice 7 Onde stationnaire. Vérifier que, le long d'une corde $[S, E]$, de longueur $SE = L$, d'extrémité E fixe, un système d'ondes stationnaires s'installe si l'on considère la superposition :

- d'une onde incidente progressive se déplaçant dans le sens des x croissants émise par S avec $y_S(t) = a \cos(\omega t)$

2. et d'une onde réfléchie progressive se déplaçant dans le sens des x décroissants émise par une source virtuelle S' , symétrique de S par rapport à E avec $y_{S'}(t) = -y_S(t) = -a \cos(\omega t)$.

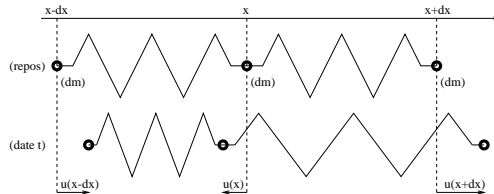
Exercice 8 Excitation de l'extrémité d'une corde par un jeu de ressorts.

On considère le système suivant, dans le plan horizontal (on néglige les effets de la pesanteur). Le point P porte la masse m et se déplace sur l'axe (O, x) , relié à la corde élastique de masse linéique μ et de tension T_E . Il est relié à deux ressorts de longueur à vide ℓ_0 et de constante de raideur k . On pose $\omega_0 = \sqrt{\frac{2k}{m}}$ et $\lambda = \frac{T_E}{2mc\omega_0}$.



À $t = 0$, la corde est confondue avec (O, x) et la vitesse initiale de P est $\dot{y}(0) = v_0$. On pose $\omega_0 = \sqrt{\frac{2k}{m}}$ et $\lambda = \frac{T_E}{2mc\omega_0}$. Étudier le mouvement de P et tracer l'allure de la forme de la corde à la date t .

Exercice 9 Vibrations longitudinales. On modélise un élastique de masse linéique μ par une chaîne d'oscillateurs élastiques formés de masselottes élémentaires séparées par des ressorts. Les masselottes couissent sans frottement sur l'axe horizontal et on néglige le poids devant les autres forces.



- Justifier les hypothèses suivantes. Les masses dm sont proportionnelles à dx : $dm = \lambda dx$. Les constantes de raideur des ressorts sont inversement proportionnelles à dx : $k = \frac{\chi}{dx}$. Les longueurs à vide sont égales à dx : $\ell_0 = dx$.
- Préciser le nom et l'unité de μ et ceux de $\frac{1}{\chi}$.
- L'élastique est cylindrique, de longueur à vide L_0 et de section S . Il est fait dans un matériau de module d'Young E et de masse volumique ρ . Donner les expressions de λ et de χ en fonction de E , ρ et S .
- En écrivant la deuxième loi de Newton pour la masse centrale, établir l'équation de d'Alembert vérifiée par l'élongation longitudinale u . Préciser la célérité c .
- Résoudre l'équation de d'Alembert en choisissant comme conditions aux limites

$$u(0, t) = U_0 \cos(\omega t) \quad \text{et} \quad u(L, t) = 0$$

Exercice 10 Masse au bout d'un ressort. Une masse ponctuelle m est accrochée au bout d'un cylindre élastique de masse linéique μ , de section S et de section S couissant sans frottement sur un axe horizontal, son autre extrémité étant fixe en O . Étudier le système et ses solutions harmoniques.

Autres forces

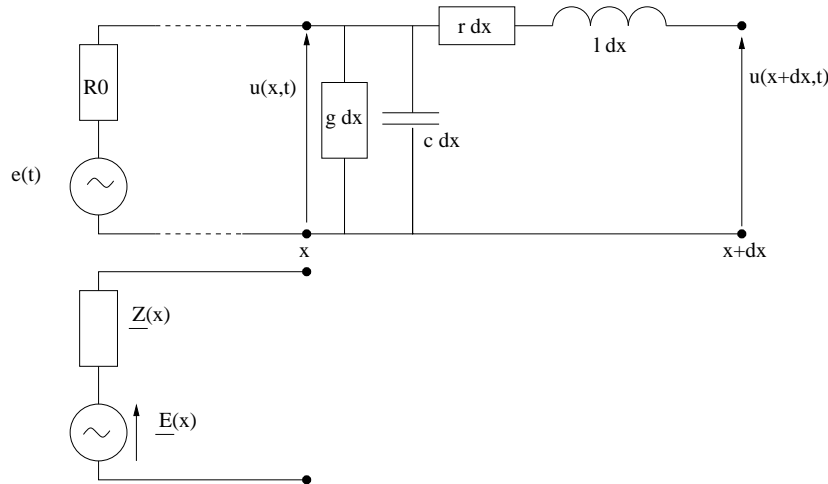
Exercice 11 Chaînette. Un fil flexible, de longueur $2L$, de masse linéique μ , est fixé à ses deux extrémités A et B dans un plan vertical (O, x, z) , avec $OA = OB = d < \frac{L}{2}$. Sous l'action de la pesanteur, la corde prend une forme particulière, symétrique, sa flèche est la distance $h = OS$, S étant le point le plus bas de la corde en dessous de O . On note T_0 la tension du fil en S et on pose $a = \frac{T_0}{\mu g}$.

1. On considère un élément infinitésimal MN de la corde, de longueur ds . Montrer que l'équilibre de cet élément se traduit par l'équation différentielle $d(T \vec{t}) \mu \vec{g} ds = \vec{0}$, $\vec{t} = \frac{MN}{MN}$ est le vecteur unitaire tangent.
2. En déduire que $T \frac{dx}{ds} = \alpha$ et $\frac{dz}{ds} = \mu g s + \beta$ où α et β sont des constantes que l'on déterminera.
3. Montrer que $\frac{dz}{ds} = \frac{s}{a}$.
4. En déduire que $z = a \operatorname{ch} \frac{x}{a} + C$ en précisant la valeur de C .
5. Pourquoi parle-t-on de "chaînette" ?

Exercice 12 Ligne avec pertes La modélisation électrocinétique d'un tronçon de ligne coaxiale, de longueur dx est donnée sur la figure ci-dessous. Le générateur alternatif sinusoïdal délivre une tension

$$e(t) = E_0 \cos(\omega t)$$

En régime sinusoïdal forcé, on note, en formalisme complexe, $\underline{E}(x)$ et $\underline{Z}(x)$ les fém et impédances complexes du générateur de Thévenin équivalent du tronçon compris entre $x = 0$ et x .



On prend l'hypothèse simplificatrice suivante :

$$\frac{r}{g} = \frac{l}{c} = R_c^2$$

1. Établir les équations différentielles vérifiées par $\underline{E}(x)$ et $\underline{Z}(x)$. On effectuera un DL au premier ordre.
2. On choisit $R_0 = R_c$ et on admet que, dans ce cas, la seule solution de l'équation différentielle en \underline{Z} est la solution triviale $\underline{Z}(x) = R_c$. En déduire $\underline{E}(x)$ puis $E(x, t)$.
3. On admet que si on place en bout de ligne un résistor de résistance R_c , il existe une constante λ telle que $u(x, t) = \lambda E(x, t)$. Déterminer la valeur de λ et établir la fonction d'onde de la tension $u(x, t)$. Décrire cette onde et préciser sa "vitesse de phase" v_φ , c'est-à-dire la vitesse à laquelle se propage un extremum quelconque de la fonction sinusoïdale.

Exercice 13 Caténaire. Un câble horizontal, de tension T_E et de masse linéique μ , est suspendu par des câbles caténaux dont l'action se ramène à une force verticale répartie $-\alpha z \cdot dx$.

1. Montrer qu'on peut établir une équation du type

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = \frac{z}{\delta^2}$$

2. En déduire l'équation différentielle vérifiée par f telle que $z = f(x - c't)$.

Exercice 14 Corde avec frottement. Un câble horizontal, de tension T_E et de masse linéique μ , se déplace dans l'eau, et est soumis à un frottement fluide linéaire de coefficient λ . Donner l'équation aux dérivées partielles vérifiée par l'altitude z .

Exercice 15 Corde verticale. Une corde verticale, suspendue par son extrémité A, l'autre extrémité B étant libre, est de longueur L et de masse linéique μ .

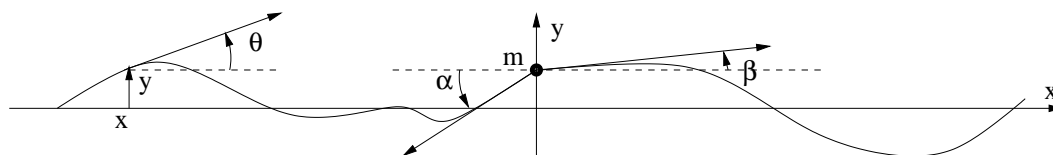
1. Établir l'expression de la tension $T(z)$.
2. Établir l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = -g \frac{\partial z}{\partial x} + g(L - z) \frac{\partial^2 x}{\partial z^2}$$

3. Pour une corde très longue, on confond $(L - z)$ et L . Justifier que lorsqu'on agite assez vite l'extrémité A, l'amplitude de l'onde augmente vers le bas.

Réflexion, transmission

Exercice 16 Réflexion et transmission des ondes transversales le long d'une corde élastique. Une corde de masse linéique μ , infinie selon l'axe horizontal x , de tension T_E , est le siège d'une onde transversale verticale selon l'axe y de célérité c et de faible amplitude. On note $y(x, t)$ l'altitude du point de la corde d'abscisse x à la date t et $\theta(x, t)$ l'angle d'inclinaison par rapport à l'horizontale de la corde au point d'abscisse x à la date t . On néglige les effets de la pesanteur. En $x = 0$ est accrochée une masselotte ponctuelle de masse m . Il peut donc y avoir une discontinuité de θ en $x = 0$, et on pose $\alpha = \theta(x = 0^-)$ et $\beta = \theta(x = 0^+)$. Une onde incidente harmonique venant des $x < 0$ a pour expression $y_i(x, t) = U_0 \cos[\omega(\frac{x}{c} - t)]$. Il apparaît une onde réfléchie $y_r = U_{0r} \cos[-\omega(\frac{x}{c} + t) + \varphi_r]$ et une onde transmise $y_t = U_{0t} \cos[\omega(\frac{x}{c} + t) + \varphi_t]$.



1. Établir l'équation de d'Alembert vérifiée par y et celle vérifiée par θ . Donner l'expression de la célérité c de l'onde en fonction de T_E et de μ .
2. On définit les coefficients de réflexion et de transmission complexes :

$$\underline{r} = \frac{U_{0r} e^{j\varphi_r}}{U_0} \quad \text{et} \quad \underline{t} = \frac{U_{0t} e^{j\varphi_t}}{U_0}$$

En écrivant les relations de passage en $x = 0$, déterminer les expressions de ces deux coefficients en fonction de $\eta = \frac{2T_E}{m\omega c}$. Préciser la relation entre \underline{r} et \underline{t} .

3. On pose $\Pi = -T_y \cdot v$. Donner le sens physique de cette grandeur et décrire comment on pourrait faire un bilan énergétique.

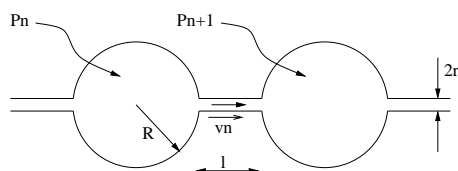
Exercice 17 Une onde transversale se propage le long d'une corde tendue. Celle-ci est constituée de deux tronçons de masses linéiques respectives μ_1 et μ_2 . On note T_E la tension à l'extrémité. Par analogie avec les considérations de l'exercice précédent, déterminer les coefficients de réflexion et de transmission d'une onde incidente du milieu 1 vers le milieu 2.

Alternatives à l'équation de d'Alembert

Exercice 18 Le tuyau cannelé chanteur.

Un tuyau cannelé (servant de gaine de protection aux câbles électriques et aux conduites d'eau enterrées, noyées ou encimentées) est modélisé par des alvéoles presque sphériques de rayon R

séparées par des tubes fins cylindriques de longueur ℓ et de rayon r . On étudie la propagation d'une onde acoustique de longueur d'onde λ avec $r \ll \ell \simeq R \ll \lambda$. On note $P_0 + p_n$ la pression dans la n -ième alvéole et $\vec{v}_n = v_n \vec{u}_x$ la vitesse dans le tuyau séparant la n -ième et la $n + 1$ -ième alvéole. On note μ la masse volumique de l'air et $\chi = \frac{1}{\mu} \frac{\partial \mu}{\partial P}$ le coefficient de compressibilité.



1. Établir une relation entre la différence des surpressions $p_n - p_{n+1}$ et la vitesse v_n . En déduire une loi analogue à celle du type inductance en complexes.
2. Établir une relation entre la différence des vitesses $v_{n-1} - v_n$ et la surpression p_n . En déduire une loi analogue à celle du type capacité en complexes.
3. On fait l'approximation du continu : $X_{n+1} - X_n \simeq \frac{\partial X}{\partial x} \cdot a$ avec $a = x_{n+1} - x_n = 2R + \ell$ ici. Établir l'équation de d'Alembert vérifiée par p (par exemple) et faire l'analogie avec l'équation des télégraphistes. Donner l'expression de la célérité c des ondes acoustiques dans le tuyau cannelé.
4. Expliquer le chant du tube cannelé entendu lorsqu'on le fait tourner à des vitesses variables (cf. expérience).