Travaux Dirigés numéro 2

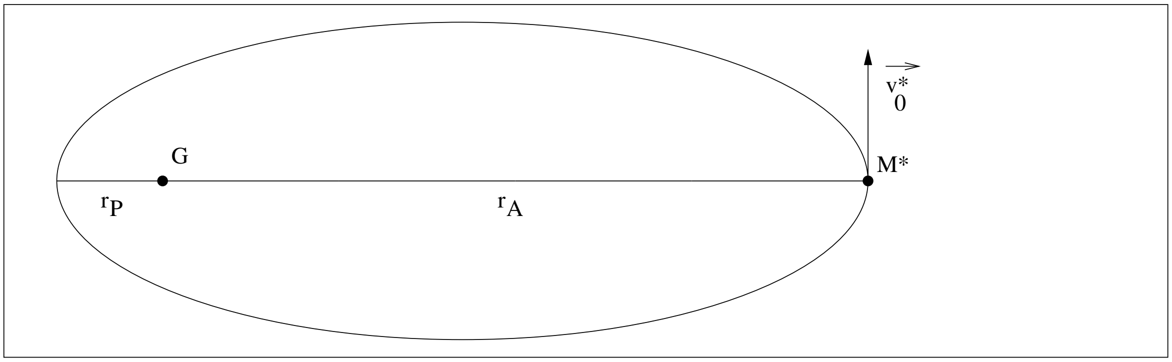
Problème à deux corps

PC, 12 septembre 2007

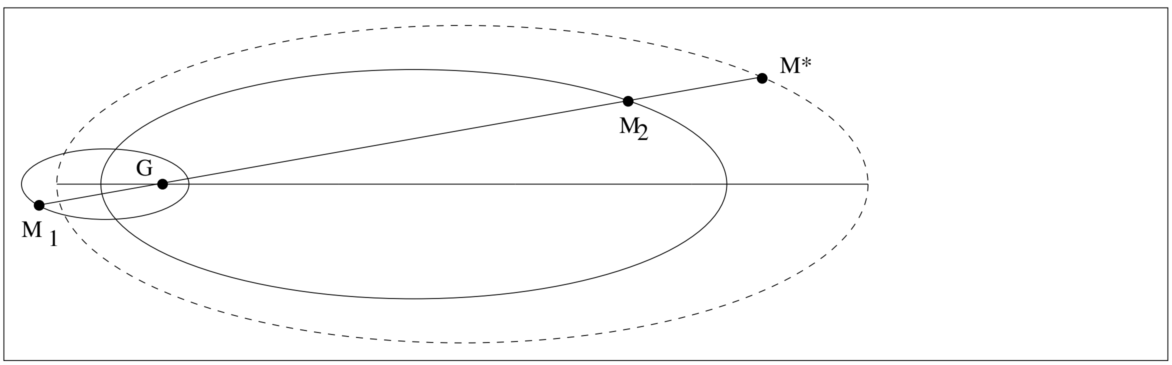
Soient deux corps massifs de masses respectives m_1 et m_2, à symétrie sphérique, de centres O_1 et O_2. À la date $t = 0$, les positions des deux centres forment un segment O_1O_2. Les vitesses initiales dans un référentiel galiléen $\mathcal{R}$ sont $\overrightarrow{v_1}_0$ et $\overrightarrow{v_2}_0$. Le système est supposé isolé. On donne les valeurs numériques suivantes :

- les masses : $m_1 = 36 \cdot 10^{24}$kg (6 masses terrestres) et $m_2 = 12 \cdot 10^{24}$kg (2 masses terrestres)
- les positions initiales : dans un repère cartésien fixe dans un référentiel galiléen $\mathcal{R}$, les coordonnées des deux centres sont $\overrightarrow{OO_1} \left| \begin{array}{l} -2 \cdot 10^8 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right.$ et $\overrightarrow{OO_2} \left| \begin{array}{l} 2 \cdot 10^8 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right.$
- les vitesses initiales : dans le même repère : $\overrightarrow{v_1} \left| \begin{array}{l} 500 \\ 125 \\ 0 \end{array} \right.$ $\overrightarrow{v_2} \left| \begin{array}{l} 500 \\ 1625 \\ 0 \end{array} \right.$

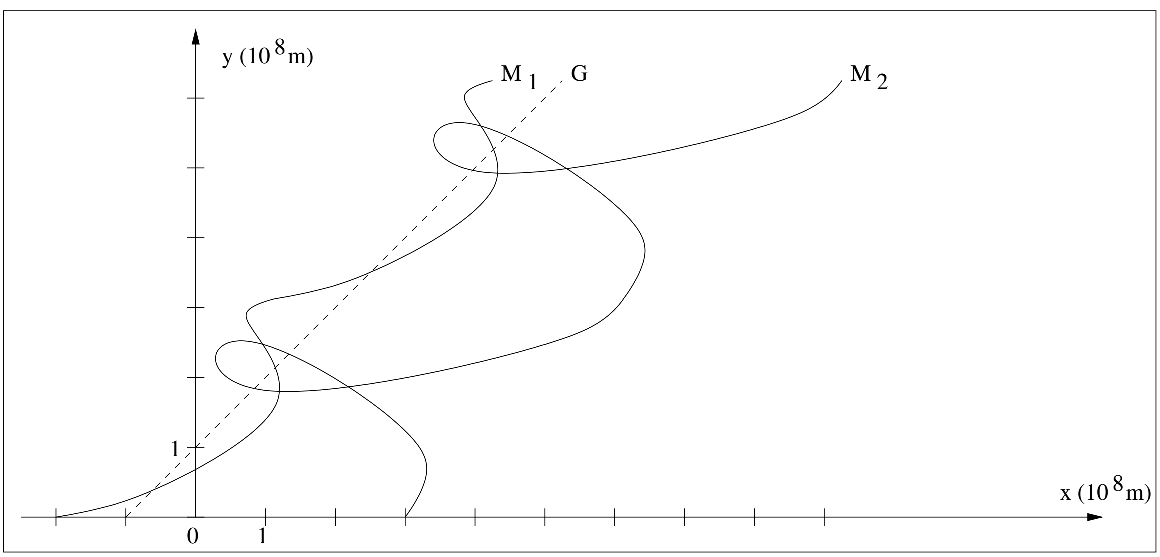
1. Déterminer la vitesse de G dans $\mathcal{R}$ $\overrightarrow{v}_G$.
2. Déterminer les positions initiales dans le référentiel barycentrique $(\mathcal{R}_b)$ $\overrightarrow{GM_1}$ et $\overrightarrow{GM_2}$.
3. Déterminer les vitesses initiales dans $(\mathcal{R}_b)$ $\overrightarrow{v_1}^*$ et $\overrightarrow{v_2}^*$ (on vérifiera que la résultante cinétique dans $(\mathcal{R}_b)$ est nulle).
4. Définir le problème réduit.
5. Déterminer le vecteur position initial $\overrightarrow{GM^*}$ et justifier que la vitesse initiale de M^* dans $\mathcal{R}_b$ est $\overrightarrow{v}_0^* = \left| \begin{array}{l} 0 \\ 1500 \\ 0 \end{array} \right.$
6. Calculer les deux grandeurs conservatives Em^* et $\overrightarrow{L}_G^*$.
7. En déduire la valeur du demi-grand axe a.
8. Justifier que le point initial correspond à l'apastre. Calculer le réayon du périastre.
9. Calculer la période du mouvement T.
10. Tracer l'allure de la trajectoire de M^* autour de G fixe dans $(\mathcal{R}_b)$.
11. Tracer l'allure des trajectoires de M_1 et de M_2 dans $(\mathcal{R}_b)$.
12. Déduire de ce qui précède l'allure des trajectoires de M_1 et de M_2 dans $(\mathcal{R}_0)$.



$\vec{v}^*_0$
G
M*
r_P
r_A



M*
M_2
G
M_1



y (10^8m)
M_1
G
M_2
1
x (10^8m)
0
1