Travaux Dirigés numéro 7

Mécanique des fluides (Euler, Navier-Stokes, Bernoulli)

PC, 22 octobre 2008

Exercice 1 Tornade. Une zone dépressionnaire a la forme d'un disque de rayon $R = 1000\text{km}$ à la surface du sol de la Terre (dont on néglige la rotondité sur ce disque) centré en un point de latitude $\lambda = \frac{\pi}{4}$. On suppose que la pression évolue de façon affine le long d'un rayon du disque, de $P_0 - \delta P = 99\ 300\text{Pa}$ au centre à $P_0 = 101300\text{Pa}$ à la périphérie. L'air est assimilé à un fluide incompressible de masse volumique $\mu = 1,30\text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$, on donne $g = 9,81\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$ et la période de révolution de la Terre dans le référentiel géocentrique $T_0 = 86164\text{s}$ (jour sidéral). On n'étudie que les vents horizontaux dans le disque ; déterminer le champ des vitesses en régime stationnaire.

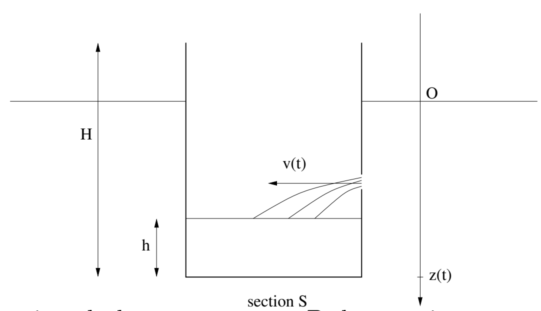
Exercice 2 Oscillations du fond d'un aquarium

Un aquarium contient de l'eau, liquide incompressible de masse volumique μ et visqueux de viscosité η. Le fond $(z = 0)$ est animé d'un mouvement de translation horizontal oscillatoire : $\overrightarrow{v}(z = 0, t) = v_0 \cos(\omega t)\overrightarrow{u}_x$. On cherche un champ des vitesses non stationnaire et un champ de pressions sous la forme $\overrightarrow{v} = v(z, t)\overrightarrow{u}_x$ et $P = P(z)$

1. Écrire le système d'équations vérifiées par $v(z, t)$ et $P(z)$.
2. Déterminer $P(z)$ en prenant $P(z = H) = P_0$ (surface supérieure de l'eau).
3. Montrer que $v(z, t) = v_0 e^{-\frac{z}{\delta}} \cos\left(\omega t - \frac{z}{\delta}\right)$ est solution de l'équation aux dérivées partielles en v et donner l'expression de δ correspondante.

Exercice 3 Naufrage d'un bateau.

La coque est assimilée à un cylindre droit vertical, fermé en bas, ouvert en haut, de section S, de hauteur H, de masse M ; la coque est percée d'un trou de section s petite devant S, situé à une hauteur L au dessus du fond de la coque ; $h(t)$ est la hauteur de l'eau rentrée dans le fond de la coque ; $z(t)$ est la profondeur du fond de la coque mesurée depuis la surface de la mer, (O, z) est orienté vers le bas.



On note μ la masse volumique de l'eau, g l'accélération de la pesanteur et P_0 la pression atmosphérique uniforme.

1. Écrire la condition d'équilibre du bateau en l'absence d'eau.
2. Montrer, lorsque l'eau commence à rentrer, que si on suppose que la vitesse d'enfoncement du bateau reste faible, alors $M + \rho S h(t) = \rho S z(t)$.
3. Déterminer la vitesse d'entrée v de l'eau à la date t.
4. En déduire l'équation différentielle vérifiée par $h(t)$.
5. Déterminer la date à laquelle le niveau de l'eau atteindra l'orifice.