Travaux Dirigés numéro 15

Particule chargée dans des champs successifs ou simultanés

PC, 11 décembre 2008

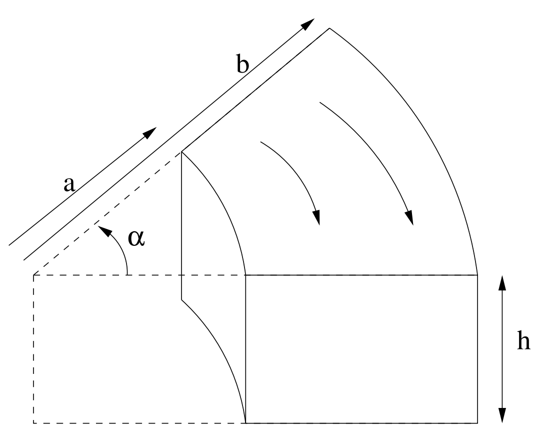
1 Aspect microscopique de la loi d'Ohm, révision de l'effet Hall

On adopte le modèle suivant : un conducteur parallélépipédique de section rectangulaire de largeur d et d'épaisseur ε, de longueur L, est parcouru par un courant électrique d'intensité I constante. On note n le nombre d'électrons de conduction par mètre cube, $-e$ la charge de l'électron et m sa masse.

Exercice 1 Loi d'Ohm. Les électrons ont des mouvements aléatoires, ils sont soumis au seul champ électrique entre deux chocs successifs avec les ions ou les défauts cristallins du conducteur. Après un choc, leur vecteur vitesse est de distribution aléatoire tant en vitesse qu'en direction. On appelle âge d'un électron la durée t qui le sépare de son dernier choc en date. L'âge moyen est $< t >= \tau$. C'est aussi le temps de vol moyen de chaque électron entre deux chocs successifs.

1. On note $\overrightarrow{E}$ le champ électrique local. Écrire l'équation différentielle vérifiée par le vecteur vitesse $\overrightarrow{v}$ d'un électron entre deux chocs.
2. On note $\overrightarrow{v}_0$ le vecteur vitesse de cet électron à l'issue du dernier choc en date. En déduire que pour l'électron d'âge t,
$$\overrightarrow{v} = \overrightarrow{v}_0 - \frac{e}{m} t \overrightarrow{E}$$
3. En passant à la valeur moyenne, en déduire le vecteur vitesse moyen $< \overrightarrow{v} >$ et la loi d'Ohm locale. Préciser l'expression de la conductivité dans ce modèle classique.
4. En déduire la loi d'Ohm globale.

Exercice 2 Résistance d'un conducteur en géométrie non prismatique. Un conducteur ohmique de conductivité γ a la forme d'un tronçon torique d'angle α.



On applique une différence de potentiel $U = V(\alpha) - V(0)$ entre la face plane postérieure et la face plane antérieure. On se place en régime stationnaire.

1. Déterminer $V(\theta)$. On donne $\Delta V = \frac{1}{r}\frac{\partial r \frac{\partial U}{\partial r}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}$.
2. En déduire $\overrightarrow{E}$ et $\overrightarrow{j}$.
3. En déduire I et R.

Exercice 3 Effet Hall. Le conducteur de l'exercice 1 est soumis à un champ magnétique permanent $\overrightarrow{B} = B\overrightarrow{u}_z$ perpendiculaire au plan horizontal (contenant la face $d \times \varepsilon$).

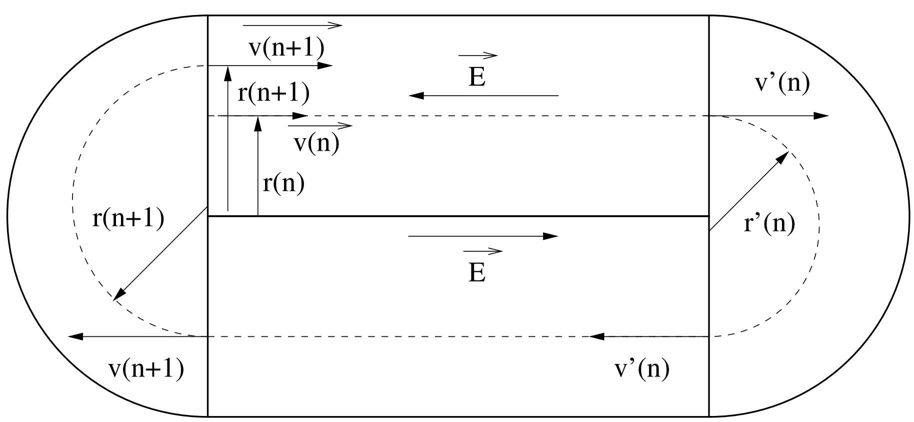
1. Déduire de l'exercice 1 l'expression de la force de frottement fluide linéaire subie par les électrons ; l'exprimer sous la forme $\overrightarrow{f} = -\lambda\overrightarrow{v}$.
2. Expliquer l'origine physique du champ électrique transversal de Hall $\overrightarrow{E}_H$ et donner l'expression du champ électrique longitudinal $\overrightarrow{E}$ associé à la différence de potentiel U entre les deux extrémités du conducteur.
3. Faire le bilan des forces et en déduire l'expression de E_H puis de U_H en fonction de I, B, n, e et ε.

2 Cyclotron

Exercice 4 Rayonnement cyclotron.

1. Un électron de charge $-e$ et de masse m se déplace dans le plan (O, x, z)ă perpendiculaire à un champ magnétique uniforme $\overrightarrow{B} = B\overrightarrow{u}_z$. Montrer que si le mouvement est circulaire de rayon R, alors il est uniforme et donner sans gros calcul sa vitesse v_0.
2. Justifier que si v_0 est grand, alors l'électron est assimilable à une boucle circulaire chargée de densité linéïque λ et dans laquelle circule un courant d'intensité i. Préciser ces deux valeurs.
3. Donner l'expression du champ magnétique $\overrightarrow{B}$ sur l'axe et expliquer en quelques mots comment on détermine le champ électrique sur l'axe $\overrightarrow{E} = \frac{\lambda}{2\varepsilon_0 R}\sin^2\alpha\cos\alpha\overrightarrow{u}_z$.
4. Quelle est l'expression du vecteur de Poynting en un point de l'axe ? Commenter le résultat.
5. *On démontrera plus tard dans le cours que c'est l'accélération centripète de l'électron qui permet de justifier la dissipation d'énergie électromagnétique, sous forme de rayonnement cyclotron.*

Exercice 5 Cyclotron. Un cyclotron est constitué de deux «D» (à cause de leur forme) séparés par deux demi-chambres rectangulaires.



On étudie un électron de masse m et de charge $-e$.

1. Justifier les notations du schéma, en particulier les conservations de rayon et de vitesse.
2. On étudie le n-ième tour. Établir les relations entre $v(n)$ et $v'(n)$, entre $r'(n)$ et $v'(n)$, entre $v'(n)$ et $v(n+1)$, entre $r(n+1)$ et $v(n+1)$.
3. En déduire la relation de récurrence vérifiée par $r(n)$.
4. On prend $v(0) = 0$, $r(0) = 0$. En déduire $r(n)$.
5. L'électron sort lorsque $r = R$. En déduire le nombre de tours.
6. *Ces calculs sont en fait à reprendre en tenant compte des effets relativistes et en tenant compte de la perte énergétique par rayonnement cyclotron.*