

Travaux Dirigés numéro 16

Corde vibrante perturbée

PC, 17 décembre 2008

1 Cable parcouru par un courant

On reprend le cable tendu à l'horizontale du cours, on néglige la pesanteur mais on suppose qu'il est parcouru par un courant constant d'intensité i et plongé dans un champ magnétique uniforme et constant $\vec{B} = B_0 \vec{u}_z$ (x le long de la corde, z horizontal et y vertical. Établir le système vérifié par $T(x)$ et $\alpha(x)$, en déduire l'équation vérifiée par $y(x)$.

2 Corde vibrante verticale (ascenseur spatial)

Un fil inextensible est dressé à la verticale d'un point de l'équateur de la Terre. Il possède une masse linéique μ extrêmement faible et une résistance mécanique extrêmement forte. E est un point de l'équateur terrestre, r_T est le rayon de la Terre, O_T son centre, z est l'altitude d'un point M du fil, $r = r_T + z$ est le rayon $O_T M$, h est la hauteur totale du fil, l'extrémité haute H du fil ($z_H = h$ et $r_H = r_T + h$) est libre et l'extrémité E du fil au niveau du sol ($z_E = 0$) est retenue par un ancrage.

1. Établir l'expression littérale du rayon r_0 de l'orbite géostationnaire. On prend $r_H = 4r_0$.
2. On note f_0 la force de gravitation subie par un corps de masse m en un point de l'orbite géostationnaire et on pose $a_0 = \frac{f_0}{m}$. Soit $T(r)$ la tension du fil en M . Établir l'équation différentielle

$$\frac{dT}{dr} = \mu a_0 \left[\frac{r_0^2}{r^2} - \frac{r}{r_0} \right]$$

3. En écrivant la condition aux limites en H , donner l'expression de la tension $T(r)$ en fonction de μ , a_0 , r et r_0 .
4. Une onde transversale est caractérisée par un déplacement très faible d'un point M d'altitude z du fil selon l'axe (O, x) . On note $x(z, t)$ ce déplacement et $\alpha(z, t)$ l'angle que fait le fil par rapport à la verticale. On admet que la tension du fil est uniforme le long d'une portion donnée du fil. Établir l'équation de d'Alembert relative à $x(z, t)$, en déduire la célérité $c(z)$ de l'onde au voisinage du point M de cote z en fonction de $r = r_T + z$, r_0 , et a_0 .