TP numéro 13 : optique physique (6)

Diffraction par une pupille rectangulaire

PC, 13 février 2009

1 Principe de Huygens-Fresnel

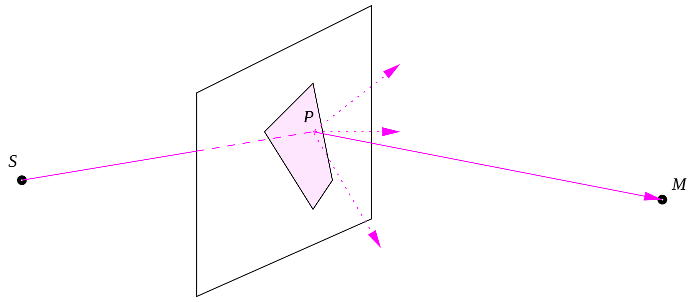
- Lorsqu'on cherche à rendre le plus fin possible un faisceau de lumière en plaçant un diaphragme face à une source ponctuelle de lumière, on constate au contraire un élargissement très important de ce faisceau lorsque la taille de l'ouverture devient très faible. C'est le phénomène de $\boxed{\text{diffraction}}$ ([`complément culturel`] étymologiquement, diffracter signifie *briser en sens divers*).
- On veillera à éviter de confondre réfraction, diffusion et diffraction même si ce troisième mot est dérivé des deux premiers. La réfraction est une brisure du rayon lumineux due au changement d'indice de réfraction à la traversée d'un dioptre ; la diffusion peut correspondre à la réflexion dans de multiples directions pour les surfaces opaques granuleuses ou à la réfraction dans de multiples directions à travers une vitre dépolie (réflexion diffuse), il peut aussi y avoir des phénomènes de diffusion moléculaire ou par des particules microscopiques (diffusion de Mie).
- Le problème de la diffraction se ramène à un problème d'interférences entre une infinité de sources grâce au principe suivant.

PROPRIÉTÉ : **Principe de Huygens-Fresnel** : Soit une fenêtre effectuée dans un plan, éclairée par une source de lumière monochromatique, P un point géométrique de cette fenêtre et dS un élément de surface dans son plan. La fenêtre élémentaire ainsi définie **se comporte comme une source ponctuelle secondaire de lumière**, de même fréquence, dont l'amplitude complexe est proportionnelle à celle de l'onde incidente en P et à l'aire de dS.

- Le programme impose une hypothèse simplificatrice importante. L'onde émise par une source ponctuelle dans un milieu homogène est une onde sphérique. Pour l'onde émise en S vers P sur la fenêtre et celle secondaire émise en P vers M, le module de l'amplitude en P (respectivement M) est donc une fonction décroissante de SP (resp. PM). Cependant, on travaillera dans toute cette section avec l'hypothèse suivante qu'on ne prendra pas la peine de rappeler.

DÉFINITION : **Hypothèse d'uniformité de l'éclairement** : on néglige les différences d'éclairement des points de la fenêtre par la source et celles de M par les sources secondaires de la fenêtre.

- Soit Σ une fenêtre plane éclairée par une source ponctuelle monochromatique S et M un point dans le champ d'interférences des sources secondaires définies sur Σ.



Sous l'hypothèse d'uniformité :

- l'amplitude complexe de l'onde incidente en P est : $\underline{a}_P(t) = A_0 e^{j\omega t - j\frac{2\pi(SP)}{\lambda}}$

- l'amplitude complexe en M de l'onde émise par la source secondaire (P, dS) est : $d\underline{a}_P(M,t) = K\underline{a}_P(t)e^{-j\frac{2\pi(PM)}{\lambda}}dS$

RÉSULTAT : En M interfèrent les lumières cohérentes émises par les sources secondaires (P, dS) lorsque P parcourt Σ et que les dS forment un pavage de la fenêtre :

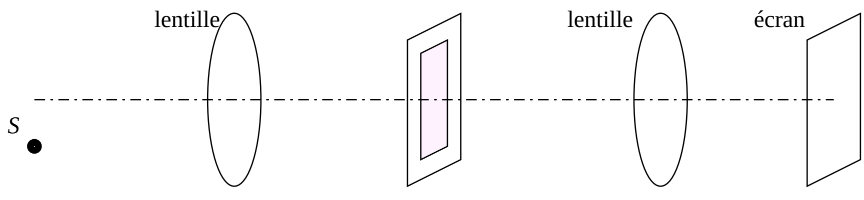
$$\underline{a}(M,t) = \iint_\Sigma d\underline{a}_M(P,t) = KA_0e^{j\omega t}\iint_\Sigma e^{-j\frac{2\pi(SPM)}{\lambda}}dS$$

[`méthode`] Cette formule très importante ramène les calculs des figures de diffraction à des calculs géométriques d'intégrales complexes.

2 Diffraction à l'infini par une pupille rectangulaire

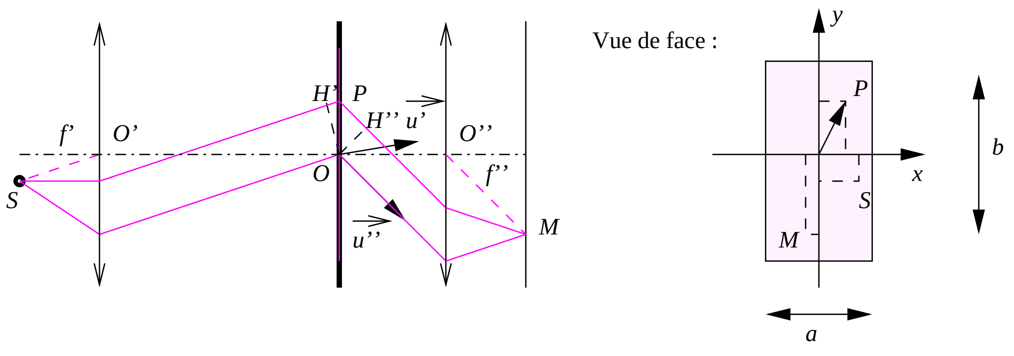
► *Le calcul général des figures de diffraction est un fastidieux exercice de calcul qui peut efficacement être effectué par un logiciel. Dans ce paragraphe, on détaille le calcul complet dans le cas simple de la fenêtre rectangulaire à l'infini.*

► Le dispositif est le suivant, il est appelé dispositif de **Fraunhofer** :



► Si P est un point de la fenêtre plane, ou pupille rectangulaire, et M un point de l'écran, le chemin optique (SPM) s'exprime par comparaison à un chemin de référence (SOM) où O est un point de la fenêtre (souvent le centre). Calcul de δ :

RÉSULTAT : Soit O un point de référence et P un point quelconque de la fenêtre plane ; le **chemin optique** s'écrit : $(SPM) = (SOM) + \overline{H'P} + \overline{PH''} = (SOM) + (\overrightarrow{u''} - \overrightarrow{u'}) \cdot \overrightarrow{OP}$, où $\overrightarrow{u'}$ et $\overrightarrow{u''}$ sont les vecteurs unitaires directeurs des rayons incident issu de S et diffracté pointant vers M.



► Les conditions de Gauss impliquent que S et M sont aux voisinages respectivement de l'axe donc $SO' \simeq f'$ et $O''M \simeq f''$. Sur la vue de face, les centres O', O et O'' des deux lentilles et de la pupille sont alignés sur l'axe optique, on lit aisément les coordonnées des trois vecteurs. On en déduit :

$$\overrightarrow{u'} = \frac{\overrightarrow{SO'}}{SO'} \simeq \frac{1}{f'} \left| \begin{array}{l} -x_S \\ -y_S \\ f' \end{array} \right. = \left| \begin{array}{l} -\frac{x_S}{f'} \\ -\frac{y_S}{f'} \\ 1 \end{array} \right. \qquad \overrightarrow{OP} \left| \begin{array}{l} x \\ y \\ 0 \end{array} \right. \qquad \overrightarrow{u'} = \frac{\overrightarrow{O''M}}{O''M} \simeq \frac{1}{f''} \left| \begin{array}{l} x_M \\ y_M \\ 0 \end{array} \right. = \left| \begin{array}{l} \frac{x_M}{f''} \\ \frac{y_M}{f''} \\ 1 \end{array} \right.$$

On en déduit

$$(SPM) = (SOM) + (\overrightarrow{u''} - \overrightarrow{u'}) \cdot \overrightarrow{OP} = (SOM) + \left(\frac{x_M}{f''} + \frac{x_S}{f'}\right) x + \left(\frac{y_M}{f''} + \frac{y_S}{f'}\right) y$$

On peut alors calculer l'intégrale de la formule de diffraction : lorsque P décrit la pupille rectangulaire, ses coordonnées rectangulaires varient dans $[-\frac{a}{2}, \frac{a}{2}] \times [-\frac{b}{2}, \frac{b}{2}]$ et l'intégrale double est le produit de deux intégrales simples sur x et y.

RÉSULTAT : L'**onde complexe résultante** en M sur l'écran obtenue par diffraction à l'infini d'une source à l'infini par une pupille rectangulaire est :

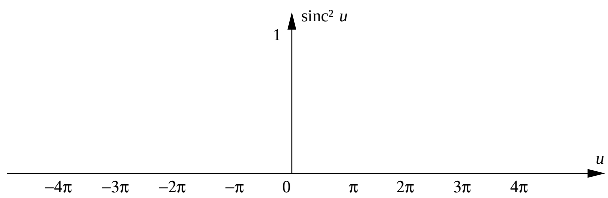
$$\underline{a}(M,t) = KA_0 e^{j\omega t - j\frac{2\pi(SOM)}{\lambda}} \cdot a \cdot b \cdot \mathrm{sinc}\frac{\pi \alpha_M a}{\lambda} \mathrm{sinc}\frac{\pi \beta_M b}{\lambda}$$

avec $\alpha_M = \left(\frac{x_M}{f''} + \frac{x_S}{f'}\right)$ et $\beta_M = \left(\frac{y_M}{f''} + \frac{y_S}{f'}\right)$. L'éclairement s'écrit donc :

$$\mathcal{E}(M) = \mathcal{E}_0 \mathrm{sinc}^2 \frac{\pi \alpha_M a}{\lambda} \mathrm{sinc}^2 \frac{\pi \beta_M b}{\lambda}$$

Démonstration :

- On obtient donc une figure de diffraction centrée sur le point S', image de S sur l'écran par le système optique en négligeant la diffraction et dont l'allure est obtenue par l'analyse succincte de la fonction sinc^2.

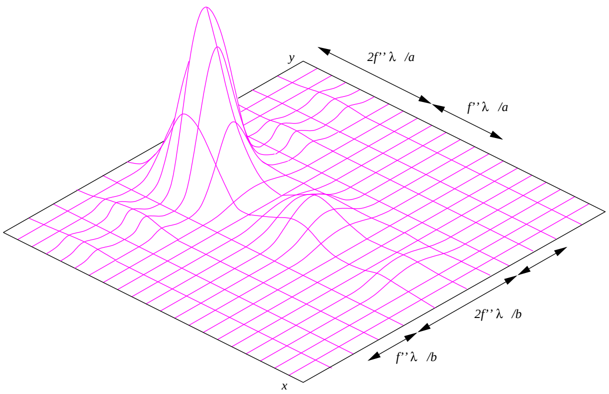


- Détermination des points d'annulation.

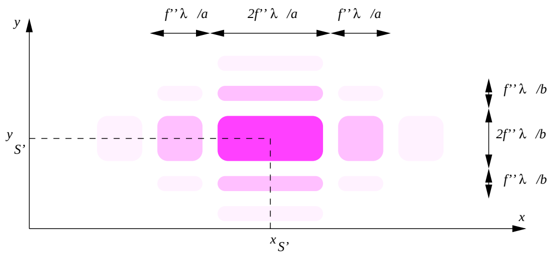
$$x_M = -\frac{f''}{f'} x_S + \frac{f'' \lambda u}{\pi a} \quad \text{et} \quad y_M = -\frac{f''}{f'} y_S + \frac{f'' \lambda u}{\pi a} \quad \text{avec} \quad n \in \mathbb{Z}*$$

Démonstration :

- Largeur de la bosse centrale :
- Si la hauteur de la bosse centrale est 1, celle de la deuxième bosse ($u \simeq \pm\frac{3\pi}{2}$) est de l'ordre de $0,040$, celle de la troisième bosse $0,016$, puis la fonction (majorée par $\frac{1}{u^2}$) ne dépasse plus $0,009$, soit moins de 1% de la bosse centrale. L'allure de la surface $\mathcal{E} = f(x,y)$ présente donc un pic central très important puis des systèmes de bosses dans les deux directions x et y.

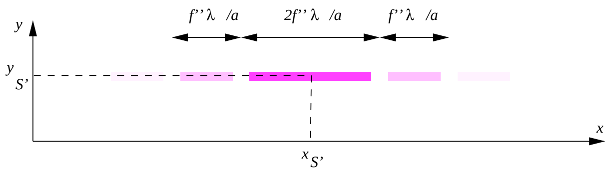


RÉSULTAT : La figure de diffraction présente une tache centrale très brillante, incluse dans un rectangle de côtés $\frac{2f''\lambda}{a} \times \frac{2f''\lambda}{b}$, centrée sur l'image S' de S par le système optique sans diffraction et des taches secondaires de moins en moins brillantes quand on s'écarte de S', incluses dans des rectangles de largeur et/ou de longueur deux fois moins importante.



- Si a et b sont très petits, la tache centrale devient très grande, et la pupille s'assimile à une source ponctuelle de lumière. On justifie ainsi que le dispositif des trous de Young éclairé par une source ponctuelle de lumière monochromatique permet d'obtenir deux sources ponctuelles cohérentes.
- Le cas particulier suivant est une conséquence immédiate des résultats précédents, en faisant tendre b vers l'infini.

RÉSULTAT : Pour une **pupille fente**, la figure de diffraction prend la forme de tirets dont la largeur est $\frac{2f''\lambda}{a}$ pour le tiret central très brillant et $\frac{f''\lambda}{a}$ pour les autres.



[`remarque`] *On prendra garde au piège : ces taches qui s'étendent en largeur selon l'axe x sont bien créés par une fente longue selon l'axe y, et au contraire d'épaisseur très étroite selon x. Ce résultat est général pour tous les phénomènes de diffraction.*

- [`aspect expérimental`] En choisissant une lentille de distance focale f'' très grande, on peut mesurer avec une très bonne précision la largeur de la tache centrale et avoir ainsi accès à une valeur de la largeur a (qui peut être très petite) de la fente.
- Le phénomène de diffraction est important dès que la largeur de la fente est comparable à λ. Cette propriété est plus générale.

PROPRIÉTÉ : Dès que la lumière doit passer dans un **diaphragme** dont l'une des dimensions est comparable à celle de la longueur d'onde, on observe un élargissement important de la tache faite sur un écran par un faisceau lumineux : la notion de rayon lumineux doit alors être rejetée : on atteint la **limite de l'optique géométrique**.