TP numéro 14 : optique physique (7)

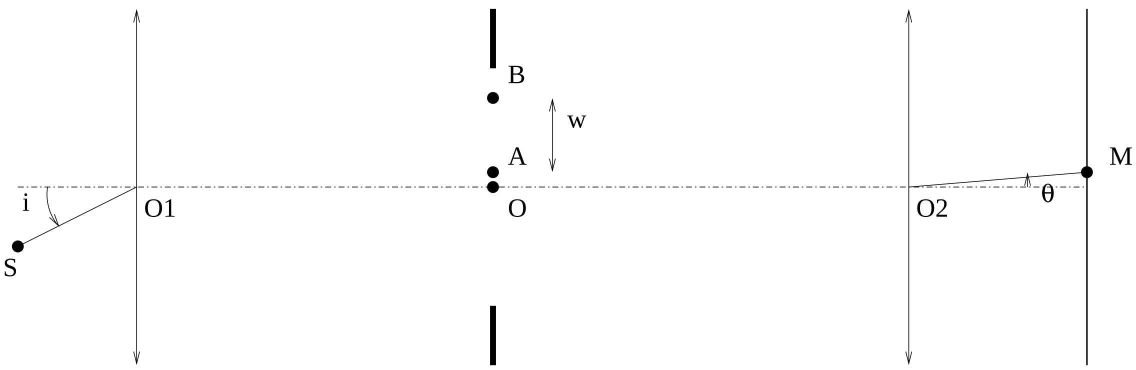
Diffraction par une pupille rectangulaire

PC, 13 mars 2009

1 Approfondissement du calcul de diffraction

On a vu, dans la séance 6, le calcul de la figure de diffraction (« stade 1 ») par une fente fine et infiniment longue, la source étant au foyer objet de la lentille L_1.

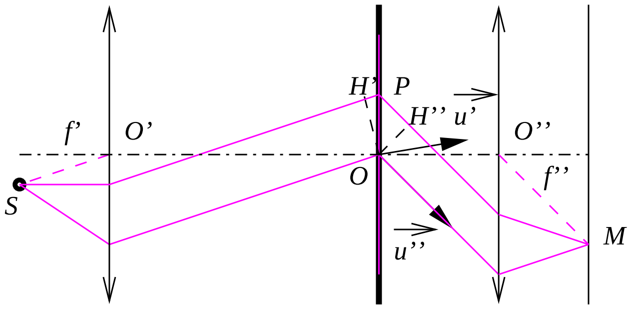
Exercice 1 **Stade 2** : la source n'est plus au foyer objet de $L1$, mais dans le plan focal de L_1. Deux points A et B sont dans le plan de la figure, éléments d'une pupille éclairée par une source ponctuelle dans le plan focal objet d'une lentille convergente ; M est un point d'un écran situé dans le plan focal image d'une lentille convergente. S et M sont repérés par les angles **orientés** i (angle d'incidence du faisceau) et θ (angle d'observation). La distance AB est notée w. Dans cet exercice, on ne fait pas l'hypothèse des petits angles. Sur la figure, i et θ sont tous les deux positifs.

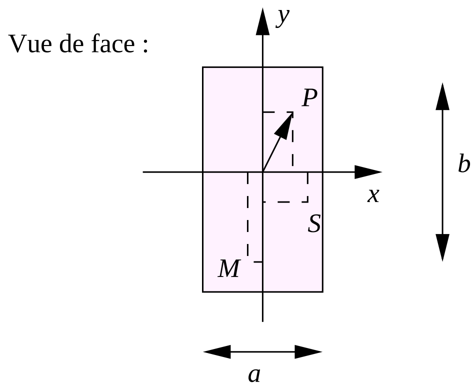


1. Tracer les rayons passant par S, A et M d'une part, par S, B et M d'autre part.
2. Donner l'expression de $\delta = (SBM) - (SAM)$ en fonction de i, θ et w.
3. On note $\underline{a}_A(M,t)$ (respectivement $\underline{a}_B(M,t)$) l'onde arrivant en M à la date t en passant par A (resp. B). Donner l'expression de $\underline{a}_B(M,t)$ en fonction de $\underline{a}_A(M,t)$, δ et λ.
4. En déduire l'expression de $\underline{a}_P(M,t)$ en fonction de la fonction de référence $\underline{a}_O(M,t)$ où O est le point au centre de la pupille et P un point quelconque de la pupille.
5. On pose $\vec{u}_1 = \frac{\overline{SO_1}}{SO_1}$ et $\vec{u}_2 = \frac{\overline{O_2M}}{O_2M}$. Montrer que

$$(SPM) = (SOM) + (\vec{u}_2 - \vec{u}_1) \cdot \overrightarrow{OP}$$

Exercice 2 **Stade 2** : la pupille est rectangulaire.
Soit O un point de référence et P un point quelconque de la fenêtre plane.





1. Montrer que le **chemin optique** s'écrit :

$$(SPM) = (SOM) + \overline{H'P} + \overline{PH''} = (SOM) + (\overrightarrow{u''} - \overrightarrow{u'}) \cdot \overrightarrow{OP}$$

   où $\overrightarrow{u'}$ et $\overrightarrow{u''}$ sont les vecteurs unitaires directeurs des rayons incident issu de S et diffracté pointant vers M.
2. Les conditions de Gauss impliquent que S et M sont aux voisinages respectivement de l'axe donc $SO' \simeq f'$ et $O''M \simeq f''$. Sur la vue de face, les centres O', O et O'' des deux lentilles et de la pupille sont alignés sur l'axe optique. Montrer que :

$$\overrightarrow{u'} = \frac{\overrightarrow{SO'}}{SO'} \simeq \frac{1}{f'} \left| \begin{array}{l} -x_S \\ -y_S \\ f' \end{array} \right. = \left| \begin{array}{l} -\frac{x_S}{f'} \\ -\frac{y_S}{f'} \\ 1 \end{array} \right. \qquad \overrightarrow{OP} \left| \begin{array}{l} x \\ y \\ 0 \end{array} \right. \qquad \overrightarrow{u'} = \frac{\overrightarrow{O''M}}{O''M} \simeq \frac{1}{f''} \left| \begin{array}{l} x_M \\ y_M \\ 0 \end{array} \right. = \left| \begin{array}{l} \frac{x_M}{f''} \\ \frac{y_M}{f''} \\ 1 \end{array} \right.$$

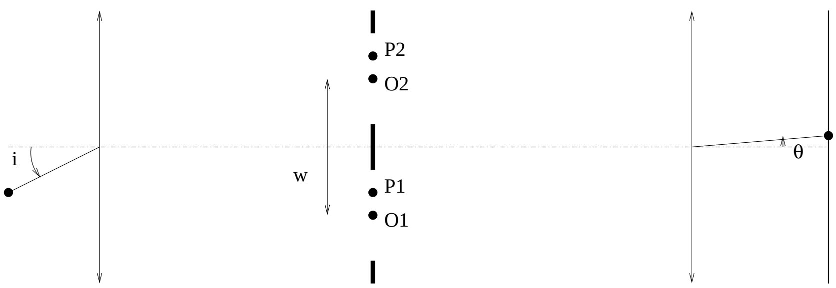
3. En déduire :

$$(SPM) = (SOM) + (\overrightarrow{u''} - \overrightarrow{u'}) \cdot \overrightarrow{OP} = (SOM) + \left(\frac{x_M}{f''} + \frac{x_S}{f'} \right) x + \left(\frac{y_M}{f''} + \frac{y_S}{f'} \right) y$$

4. Calculer l'intégrale de la formule de diffraction : lorsque P décrit la pupille rectangulaire, ses coordonnées rectangulaires varient dans $[-\frac{a}{2}, \frac{a}{2}] \times [-\frac{b}{2}, \frac{b}{2}]$ et l'intégrale double est le produit de deux intégrales simples sur x et y.
5. Calculer l'éclairement et conclure.

2 Fentes d'Young larges

Exercice 3 Soient deux pupilles identiques, de même largeur a et de centres O_1 et O_2 distants de w. Soient P_1 et P_2 deux points des pupilles 1 et 2 tels que $O_1P_1 = O_2P_2 = x$.



1. On note $\delta = (SO_2M) - (SO_1M)$ et $\delta_x = (SP_1M) - (SO_1M)$. Montrer que $\delta_x = (SP_2M) - (SO_2M)$ et en déduire, en utilisant le résultat de la question précédente, que

$$\underline{a}_{P_1}(M,t) = \underline{a}_{O_1}(M,t) \cdot e^{-j\frac{2\pi\delta_x}{\lambda}} \quad \text{et} \quad \underline{a}_{P_2}(M,t) = \underline{a}_{O_1}(M,t) \cdot e^{-j\frac{2\pi\delta}{\lambda}} \cdot e^{-j\frac{2\pi\delta_x}{\lambda}}$$

2. Si bdx est la surface élémentaire de pupille autour de P, l'onde résultante en M est $K\underline{a}_P(M,t) \cdot bdx$. Déduire de ce qui précède la fonction d'onde en M résultante des deux fentes d'Young larges. Exprimer l'éclairement comme le produit d'une fonction d'interférences et d'une fonction de diffraction (on pourra poser $\varepsilon = (\sin\theta - \sin i)$).