

# TP numéro 15 : optique physique (8)

## Réseaux plans

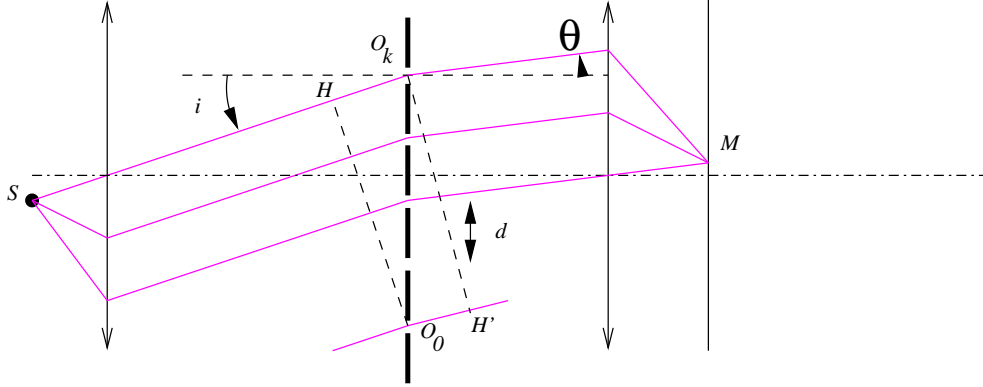
PC, 20 mars 2009

### 1 Les trois modes de sommation des ondes cohérentes

- ▶ Rappeler la formule pratique donnant l'expression de la fonction d'onde  $\underline{a}_1(M, t)$  arrivant en un point  $M$  et empruntant un chemin optique  $(L_1M)$  en fonction de la fonction d'onde  $\underline{a}_2(M, t)$  arrivant en  $M$  et empruntant un chemin optique  $(L_2M)$  et de la différence de marche  $\delta = (L_2M) - (L_1M)$ .
- ▶ Cas du diviseur d'ondes (Michelson ou trous d'Young). Si le diviseur est parfait, redémontrer la formule de Fresnel.
- ▶ Cas de la pupille diffractante Si la transparence est uniforme, rétablir l'expression de la fonction d'onde résultante en  $M$  et indiquer comment on calcule l'éclairement.
- ▶ Cas du réseau Un réseau est assimilable à une suite de fentes  $(F_n)$ ,  $n \in \{1, \dots, N\}$  telles que la différence de marche entre les rayons passant par deux fentes consécutives est constante :  $(L_{n+1}M) - (L_nM) = \delta$ . Donner l'expression de la fonction d'onde résultante en  $M$  et exprimer l'éclairement.

### 2 Réseaux plans

- ▶ DÉFINITION : Un **réseau par transmission** est un ensemble de  $N$  fentes considérées comme infiniment fines et longues, parallèles, et distantes de  $d$ . L'inverse  $\frac{1}{d}$  est appelée le **pas** du réseau.  
Le pas est exprimé en traits par mètre ( $\text{m}^{-1}$ ).
- ▶ Le réseau est éclairé par une source ponctuelle placée au foyer image d'une lentille convergente (faisceau de lumière parallèle) et observé à l'infini (ce sont les conditions de Fraunhofer). Par analogie avec l'étude de la réfraction, on note  $i$  l'angle d'incidence du faisceau et  $\theta$  l'angle d'observation de la lumière diffractée.



- À titre exceptionnel, nous allons dépasser un peu le cadre strict du programme en notant  $a$  la largeur de chaque fente. Ce n'est qu'un prolongement du préliminaire. On note donc  $O_0, O_1, O_2, \dots, O_k, \dots, O_{N-1}$  les centres des fentes et  $P_0, P_1, P_2, \dots, P_k, \dots, P_{N-1}$  des points courants de chacune de ces fentes repérés par  $\forall k \in \{0, \dots, N-1\}, O_k P_k = x \in [-\frac{a}{2}, +\frac{a}{2}]$ . On peut donc écrire

$$\underline{a}_{P_k}(M, t) = \underline{a}_{O_k}(M, t) \cdot e^{-j \frac{2\pi x(\sin i - \sin \theta)}{\lambda}} = \underline{a}_{O_0}(M, t) \cdot e^{-j \frac{2\pi(kd)(\sin i - \sin \theta)}{\lambda}} e^{-j \frac{2\pi x(\sin i - \sin \theta)}{\lambda}}$$

On en déduit en intégrant sur chaque fente puis en sommant sur toutes les fentes

$$\underline{a}(M, t) = \sum_{k=0}^{N-1} K \underline{a}_{O_0}(M, t) e^{-j \frac{2\pi(kd)(\sin i - \sin \theta)}{\lambda}} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} e^{-j \frac{2\pi x(\sin i - \sin \theta)}{\lambda}} b dx$$

On en déduit, en effectuant le calcul de l'intégrale, l'expression de la série :

$$\underline{a}(M, t) = \sum_{k=0}^{N-1} K \underline{a}_{O_0}(M, t) e^{-j \frac{2\pi(kd)(\sin i - \sin \theta)}{\lambda}} ab \operatorname{sinc} \left( \frac{\pi a(\sin \theta - \sin i)}{\lambda} \right)$$

On retrouve donc le même résultat que pour les fentes d'Young larges : la figure d'interférences de réseau est modulée par une figure de diffraction. Si  $a$  reste faible, le sinus cardinal vaut 1 et on a disparition de la modulation diffractive. C'est ce qu'on étudie maintenant.

- Les fentes étant infiniment fines, le problème se ramène à un calcul d'interférences entre  $N$  sources. On note  $O_0, O_1, O_2, \dots, O_{N-1}$  les positions des points d'intersection des fentes avec le plan de la figure. L'onde en  $M$  est la somme des ondes passant par les différentes fentes. On peut écrire formellement :

$$\underline{a}(M, t) = \sum_{k=0}^{N-1} \underline{a}_k(M, t) = \underline{a}_0(M, t) \sum_{k=0}^{N-1} e^{-j \frac{2\pi \delta_k}{\lambda}}$$

avec  $\delta_k = (SO_k M) - (SO_0 M)$ .

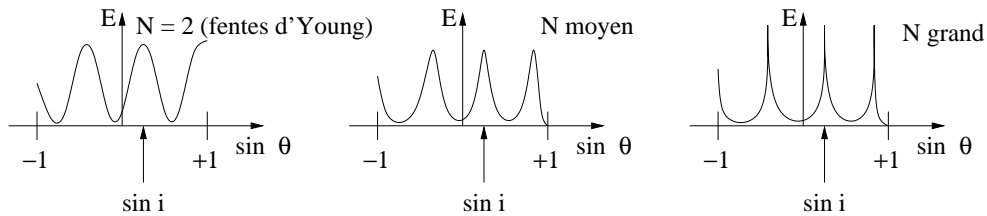
- Calcul de la différence de marche entre le rayon passant par  $O_k$  et  $O_0$  :  $\delta_k = (SO_k M) - (SO_0 M) =$

- La somme est donc celle des termes d'une suite géométrique de raison  $q = e^{j \frac{2\pi d(\sin \theta - \sin i)}{\lambda}}$  et peut être calculée explicitement :

- On en déduit l'éclairement grâce à une astuce de calcul qu'il faut **absolument** mémoriser :

- La condition de nullité du dénominateur donne : Pour ces valeurs, le numérateur s'annule

aussi et on démontre que l'éclairement prend des valeurs maximales, en dehors desquelles l'éclairement est très faible.



- Dans le respect du programme, on doit seulement retenir le résultat relatif aux positions des franges brillantes (GÉOLOGIE NANCY 98, MINES PC (I) 99, CCP MP (II) 99, X-CACHAN PSI (I) 01, DEUG 04) :

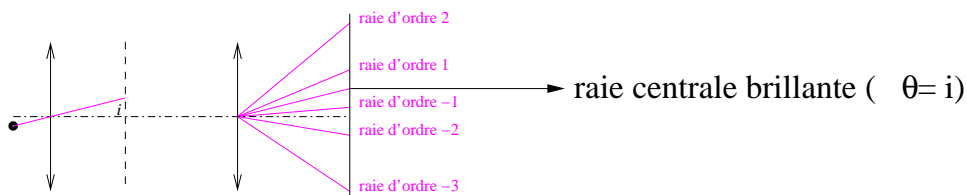
RÉSULTAT : **Formule des réseaux par transmission** : on observe des **interférences constructives** si la différence de marche entre les trajets  $(SO_kM)$  et  $(SO_{k+1}M)$  est un multiple entier de  $\lambda$  :

$$\sin \theta - \sin i = p \frac{\lambda}{d}, \quad p \in \mathbb{Z}$$

$p$  désigne l'ordre d'interférences.

On l'a démontré ci-dessus, mais seule la démonstration élémentaire suivante est exigible :

- En dehors de ces directions, les radiations sont presque éteintes.  $i$  étant fixé, on observe donc dans certaines directions  $\theta_p$  privilégiées (définies par  $\sin \theta = \sin i + p \frac{\lambda}{d}$ ) une raie lumineuse très brillante et très fine, résultante de la superposition cohérente de toutes les lumières diffractées au passage par chacune des fentes du réseau. Il y a donc un ensemble de raies pour cette radiation monochromatique. Le nombre total de raies observables est majoré par la condition  $-1 \leq \sin \theta_p \leq 1$ .



- Il existe une analogie forte entre le comportement du prisme et celui du réseau (CENTRALE PC (II) 00, ESIGETEL MP 00, CENTRALE MP (II) 02, AGREG (II) 04).

RÉSULTAT : Le réseau possède des **propriétés dispersives** analogues à celles du prisme. À ordre d'interférence fixé (souvent  $p = \pm 1$ ), on peut mesurer la **déviaton** d'un faisceau :

$$D_p = \theta_p - i \quad \text{avec} \quad \sin \theta_p = \sin i + p \frac{\lambda}{d}$$

Démonstration :

- ▶ Il existe une direction correspondant à un minimum de déviation :
  
  
  
  
  
  
  
  
  
  
- ▶ On peut donc développer des études de **spectroscopie** parfaitement analogues à celles étudiées en première année avec le prisme. On peut, en particulier, mesurer le pas d'un réseau connaissant la longueur d'onde d'une raie connue pour une lampe spectrale, puis mesurer une longueur d'onde inconnue connaissant le pas. On renvoie au cours de première année pour l'utilisation et le réglage du spectrogoniomètre.
- ▶ **Exercice.** Un réseau comporte 300 raies par millimètre, sa largeur totale est de 3 cm. On l'éclaire sous une incidence  $i = \frac{\pi}{6}$ .
  1. On utilise une source monochromatique (LASER) de lumière rouge de longueur d'onde  $\lambda = 450$  nm. Calculer le pas  $d$ , le nombre total de raies  $N$ , les valeurs de  $p$  pour les raies visibles et la direction angulaire dans laquelle on voit la raie d'ordre 2.
  2. Quels sont les angles  $i$  et  $\theta$  correspondant au minimum de déviation pour la raie d'ordre 3 et quel est l'angle de déviation minimale correspondant ?
  3. Pour la raie d'ordre -2, avec une lampe à vapeur de sodium émettant deux raies de longueurs d'onde proches  $\lambda' = \lambda_0 - \frac{\Delta\lambda}{2}$  et  $\lambda'' = \lambda_0 + \frac{\Delta\lambda}{2}$  et avec un angle d'incidence  $i = \frac{\pi}{6}$ , calculer les directions angulaires  $\theta'_{-2}$  et  $\theta''_{-2}$ ; en déduire l'écart angulaire  $\Delta\theta$  : distingue-t-on les deux raies ?
  4. On passe enfin en lumière blanche. Que voit-on ? Dans quelle situation de la vie courante observe-t-on ceci ? Montrer qualitativement qu'il y a brouillage des spectres correspondant à des ordres différents.
- ▶ Vérification expérimentale :
  1. LASER.
  2. Sodium.
  3. Mercure.
  4. Lumière blanche.